

Le contenu

Remarque

I. Dérivabilité d'une fonction numérique :

1) Dérivabilité d'une fonction en un point :

Activité :

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \frac{x-3}{2x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = -2 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de f à droite de 1, et donner une interprétation géométrique de résultat
2. Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1, et donner une interprétation géométrique de résultat
3. Etudier la dérivabilité de f au point 1

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .

1. On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Le réel l est appelé le nombre dérivé de f en a , on le note $f'(a)$.

2. Si f est dérivable en a alors la courbe de f (C_f) admet une **tangente** en point $A(a; f(a))$ d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple :

g est définie par : $g(x) = x^3$.

1. Etudions la dérivabilité de g en 1. On a :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x + 1 = 3$$

Donc g dérivable en 1, et on a : $g'(1) = 3$

2. Déterminons l'équation de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 1.

On a $g'(1) = 3$ et $g(1) = 1$

Donc l'équation de la tangente à

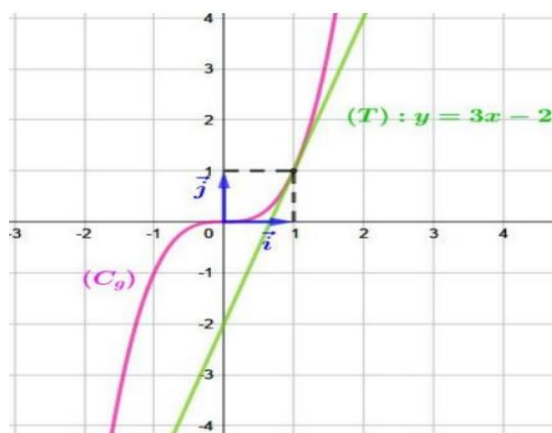
(C_g) au point $A(1; g(1))$

est : $y = g'(1)(x - 1) + g(1)$

$$y = 3(x - 1) + 1$$

$$y = 3x - 2$$

D'où $(T): y = 3x - 2$



Remarque :

- ✓ Si $f'(a) = 0$ alors (C_f) admet une tangente **horizontale** d'équation $y = f(a)$ en point d'abscisse a
- ✓ Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en a , la courbe (C_f) admet au point d'abscisse a une **tangente verticale**.

Exercice d'application :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 - x^2$

1. Calculer le nombre dérivé de f en 1.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.

2) La dérivabilité à droite - La dérivabilité à gauche en un point :

a) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .

1. On dit que la fonction f est dérivable à droite en a s'il existe un réel l tel que :
$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Le réel l est appelé le nombre dérivé à droite de f en a , on le note : $f'_d(a)$

2. On dit que la fonction f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel l tel que :
$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

Le réel l est appelé le nombre dérivé à gauche de f en a , on le note : $f'_g(a)$.

Exemple :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 1|$

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1.
2. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

b) L'interprétation géométrique :

Si f est dérivable à droite en a alors (C_f) admet une **demi-tangente à droite** en $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$.

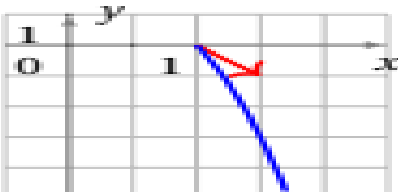
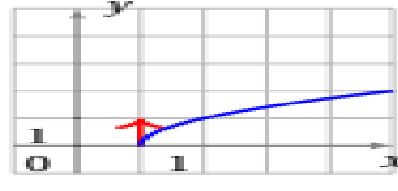
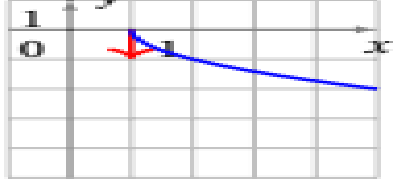
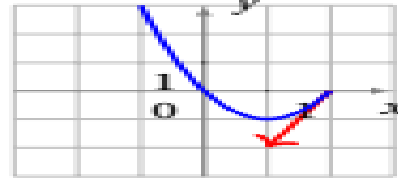
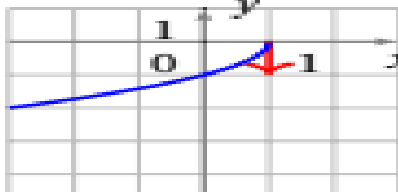
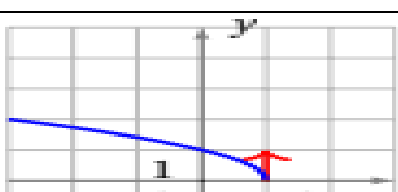
De même, si f est dérivable à gauche en a alors (C_f) admet une **demi-tangente à gauche** en $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

f Dérivable en $a \Leftrightarrow f$ dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$

Résume : Interprétation géométrique de la dérivabilité à gauche et à droite d'un point a

Dérivabilité de f	Interprétation géométrique	
f Dérivable à droite de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$	(C_f) admet une demi tangente en point $A(x_0; f(x_0))$ d'équation $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	
f n'est pas dérivable à droite de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	(C_f) admet une demi tangente verticale dirige vers le haut en point $A(x_0; f(x_0))$	
f n'est pas dérivable à droite de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	(C_f) admet une demi tangente verticale dirige vers le bas en point $A(x_0; f(x_0))$	
f Dérivable à gauche de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$	(C_f) admet une demi tangente en point $A(x_0; f(x_0))$ d'équation $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	
f n'est pas dérivable à gauche de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	(C_f) admet une demi tangente verticale dirige vers le bas en point $A(x_0; f(x_0))$	
f n'est pas dérivable à gauche de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	(C_f) admet une demi tangente verticale dirige vers le haut en point $A(x_0; f(x_0))$	

Exemple :

D'après l'exemple précédent :

- On a f est dérivable à droite en I , alors (C_f) admet une demi-tangente (T_1) au point

$A(1; f(1))$ d'équation :

$$\begin{cases} y = f'_d(1)(x - 1) + f(1) \\ x \geq 1 \end{cases}$$

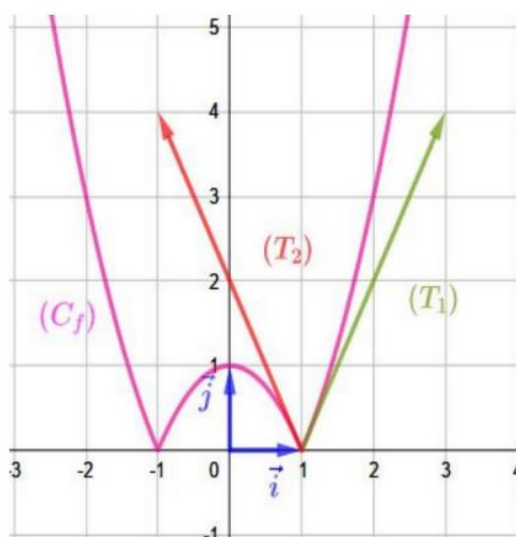
$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2(x - 1) + 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 2 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

- On a f est dérivable à gauche en 1 , alors (C_f) admet une demi-tangente (T_1) au point

$A(1; f(1))$ d'équation :

$$\begin{cases} y = f'_g(1)(x - 1) + f(1) \\ x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2(x - 1) + 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$



Exercice d'application 01 :

Soit f la fonction définie sur $] - \infty; 1]$ par : $f(x) = |x|\sqrt{1-x}$

1. Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. Etudier la dérivabilité de f à gauche en $x_0 = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
3. La fonction f est-elle dérivable en $x_0 = 0$?

3) La dérivabilité sur un intervalle :

Définition1 :

- On dit que f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ si f est dérivable en tout point de l'intervalle $]a, b[$.
- On dit que f est dérivable sur l'intervalle fermé $[a, b]$ si f est dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, et dérivable à droite en a et à gauche en b .

Définition2 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I .

La fonction dérivée de f est la fonction notée f' définie par :

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f'(x) \end{aligned}$$

4) Dérivation des fonctions usuelles :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et f une fonction de variable x , on a : Le tableau ci-dessous

la fonction f	Sa fonction dérivée f'	f est dérivable sur :
$x \rightarrow a$	$x \rightarrow 0$	$\mathbb{R}$
$x \rightarrow x$	$x \rightarrow 1$	$\mathbb{R}$
$x \rightarrow ax + b$	$x \rightarrow a$	$\mathbb{R}$
$x \rightarrow x^n$	$x \rightarrow nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$

$x \rightarrow ax^n$	$x \rightarrow a.n.x^{n-1}$	R
$x \rightarrow \sqrt{x}$	$x \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$x \rightarrow \frac{1}{x}$	$x \rightarrow -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty; 0[\text{ ou }]0; +\infty[$
$x \rightarrow \sin x$	$x \rightarrow \cos x$	R
$x \rightarrow \cos x$	$x \rightarrow -\sin x$	R
$x \rightarrow \tan x$	$x \rightarrow \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$	$R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

5) Opérations sur les fonctions dérivées :

Propriétés :

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel.

Les fonctions $u + v$, $u \times v$ et $k \times u$ sont dérivables sur l'intervalle I , et on a

pour tout x de I :

- $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.
- $(u \times v)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$.
- $(k \times u)'(x) = k \times u'(x)$.

Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I , alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur

I , et on a pour tout x de I : $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$; $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Exercice d'applications :

Déterminer la dérivée de la fonction f dans chacun des cas ci-dessous :

- $f(x) = (2x - 3)(x^2 - 5x)$
- $f(x) = \frac{5}{2}x^3 - 7x^2 - 9x + \sqrt{8}$
- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$
- $f(x) = x^3 \cos(x)$
- $f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

1) Monotonie d'une fonction numérique - Extremums d'une fonction dérivable :

a) Monotonie d'une fonction numérique

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Pour tout x de I :

- ✓ Si $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) \geq 0$ et f' s'annule en des points isolés) Alors la fonction f est **strictement croissante** sur I
- ✓ Si $f'(x) < 0$ (ou $f'(x) \leq 0$ et f' s'annule en des points isolés) Alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I
- ✓ Si $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I

Exercice d'applications :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x - 1)^3$

- 1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.
- 2) Etudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- 3) En déduire que f est strictement croissante.

b) Extremums d'une fonction dérivable

Propriété :

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I et $x_0 \in I$, on a :

- ✓ Si f' s'annule en x_0 ($f'(x_0) = 0$) et change de signe au voisinage de x_0 , alors $f(x_0)$ est un **extrémum** de la fonction f (valeur maximale ou valeur minimale)
- ✓ Si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

Exemple :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	$-\infty$	2	$-\infty$

$f'(-1) = 0$ et f' change de signe au voisinage de -1 , alors $f(-1) = 2$ est une **valeur maximale** de la fonction f

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
g	$+\infty$	-1	$+\infty$

$g'(1) = 0$ et g' change de signe au voisinage de 1 alors $g(1) = -1$ est une **valeur minimale** de la fonction g

Exercice d'application 01 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x - x^3$

- 1) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que f admet un extremum sur chacun des intervalles $\left[-\frac{3}{2}; 0\right]$ et $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

c) Dérivées successives :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I

si f' est dérivable sur I sa dérivée est appelée la dérivée seconde de la fonction f on la note : f'' ou $f^{(2)}$.

les fonctions $f^{(2)} = (f')'$ et $f^{(3)} = (f^{(2)})'$ et et $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ si elles existent appelées les fonctions Dérivées successives.

la fonction $f^{(n)}$ est appelée la fonction dérivée d'ordre n .

Exemple :

Déterminer la dérivée seconde de la fonction f dans chaque cas :

1)- $f(x) = -3x^2 - 3x + 7$; $I = \mathbb{R}$

2) - $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+3}$; $I =]-\infty; -3[$

3)- $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$; $I = \mathbb{R}$

II) Continuité et dérivation :

Propriété :

Toute fonction dérivable en a est continue en a .

Si f est dérivable sur un intervalle I alors la fonction f est continue sur I .

Remarque :

La réciproque est fautive par exemple la fonction $f: x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais non dérivable en 0. ($f'_d(0) \neq f'_g(0)$)

Exercice d'applications :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} ; & x \neq 0 \\ g(0) = 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

- 1 Montrer que g est continue en 0.
- 2 Etudier la dérivabilité de g en 0.

III) Dérivée d'une fonction composée :

Propriété :

1. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a , et on a : $(g \circ f)'(a) = [g(f(a))]' = f'(a) \times g'(f(a))$

2. Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur $f(I)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I , et on a pour tout x de I :
$$(g \circ f)'(x) = [g(f(x))]' = f'(x) \times g'(f(x))$$

Exemple :

Soient : $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \frac{x}{x-2}$

Montrons que $g \circ f$ est dérivable sur $I =]1; +\infty[$ sans déterminer $(g \circ f)(x)$.

Solution :

f Est une fonction polynôme dérivable sur I et on a $f'(x) = 2x > 0$ sur

I et $f(I) =]\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]2; +\infty[$

D'autre part, la fonction g est rationnelle, donc dérivable sur tout intervalle de $\mathbb{R} - \{2\}$, en particulier, sur $f(I)$; et $g'(x) = \frac{-2}{(x-2)^2}$. Ainsi, la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I

$$\begin{aligned}
 (\forall x \in I); (g \circ f)'(x) &= g'(f(x)) \times f'(x) \\
 &= \frac{-2}{((x^2 + 1) - 2)^2} \times 2x \\
 \text{Et} \quad &= \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}
 \end{aligned}$$

Conséquences :

Si u est strictement positive et dérivable sur I alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I , et on a :

$$\forall x \in I \quad (\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

Exercice d'application :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x^2 + 1) \text{ et } g(x) = \sqrt{2 + \sin(x)}$$

2) Déterminer deux fonctions u et v telles que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$$f(x) = (vou)(x). \text{ En déduire la dérivée de } f.$$

3) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $g'(x) = \frac{\cos(x)}{2\sqrt{2+\sin(x)}}$

IV) Dérivée de la fonction réciproque :

Propriété :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et $a \in I$:

1. Si f est dérivable en a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ et on a :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

2. Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$, et on a : $(\forall x \in f(I)) (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

1 Montrons que f admet une fonction réciproque.

2 Calculons $f(\sqrt{3})$ puis montrons que f^{-1} est dérivable en 2 et calculons $(f^{-1})'(2)$

Solution :

(1) En effet, la fonction polynôme $x \rightarrow x^2 + 1$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^+$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+): f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Puisque $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) > 0$ et $f'(0) = 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+$). Par conséquent, f admet une fonction réciproque définie sur $f(\mathbb{R}^+) = [1; +\infty[$.

(2) On a : $f(\sqrt{3}) = \sqrt{1+3} = 2$

Puisque f est dérivable en $\sqrt{3}$ et $f'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $(f'(\sqrt{3}) \neq 0)$, alors f^{-1} est dérivable en

$$f(\sqrt{3}) = 2 \text{ et on a : } (f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Exercice d'application :

Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 3x$

- 1 Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
- 2 Montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle J .
- 3 Calculer $f(\sqrt{2})$ et $(f^{-1})'(-\sqrt{2})$, en déduire l'équation de la tangente de $(C_{f^{-1}})$ en $-\sqrt{2}$.

V) Dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$:

Propriété 1 :

1) **dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$:**

Soit $n \in \mathbb{N}$

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et on a : $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$

2) **dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$:**

Soit $n \in \mathbb{N}$

Si f une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I alors la fonction

$x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et on a : $(\sqrt[n]{f(x)})' = \frac{f'(x)}{n \times \sqrt[n]{f(x)}^{n-1}}$

Exercice d'application :

Calculer la dérivée de chacune des fonctions numériques suivantes :

$$f(x) = \sqrt[4]{3 + \cos(x)} \quad g(x) = \sqrt[5]{x^2 - x} \quad h(x) = \sqrt[7]{(2 - 3x)^5}$$

Propriété 2 :

Soit r un nombre rationnel non nul

- La fonction numérique $x \mapsto x^r$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sa dérivée est la fonction $x \mapsto rx^{r-1}$
- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction numérique $x \mapsto (u(x))^r$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par la formule : $((u(x))^r)' = ru'(x)(u(x))^{r-1}$

Exercice d'application :

Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, la dérivée de la fonction f sur I :

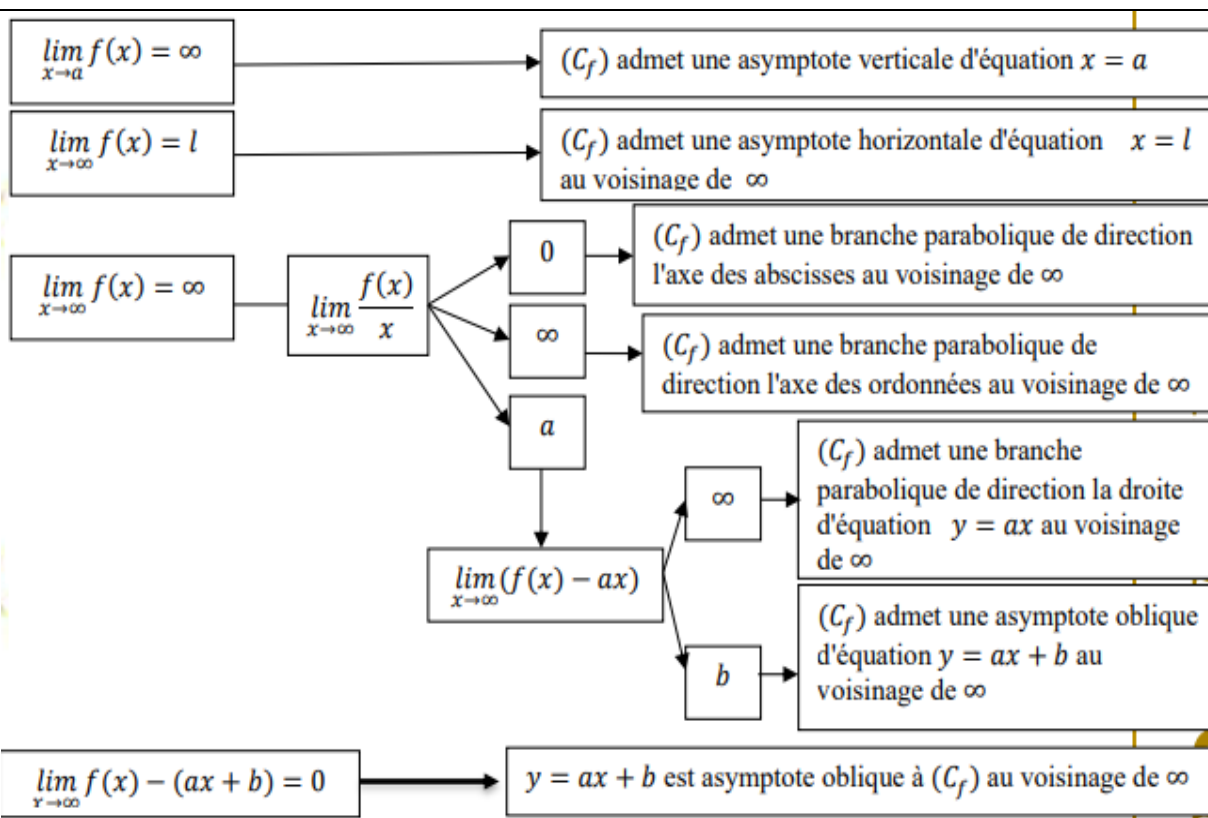
1. $I = \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}.$

2. $I = \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{2 + \cos(x)}.$

3. $I = \mathbb{R}, f(x) = (x^3 + \sqrt{5})^{\frac{3}{8}}.$

VI) Branche infinies (RAPPELS) :

Schéma récapitulatif de l'étude des branches infinies



Exemple 01 :

On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

Donc la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

Et on a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x-1} = -\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote verticale de la courbe (C_f) .

Exemple 02 :

On considère g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $g(x) = 2x - \sqrt{x}$.

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(2\sqrt{x} - 1) = +\infty$.

On calcul alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$:

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$.

Par suite : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{x} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\sqrt{x} = -\infty$.

D'où la courbe (C_g) admet une branche parabolique de direction de la droite d'équation $y = 2x$ au voisinage de $+\infty$.

Application :

On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x+2}$.

1. Donner $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f .
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f'(x)$. Interpréter les résultats.
3. a. Vérifier, pour tout x de $\mathcal{D}_f$, que $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2}$.
b. Montrer que la droite d'équation $(D): y = x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.
c. Etudier les positions relatives entre la courbe (C_f) et la droite (D) .

VII) Concavité d'une courbe – Points d'inflexion :

Propriété :

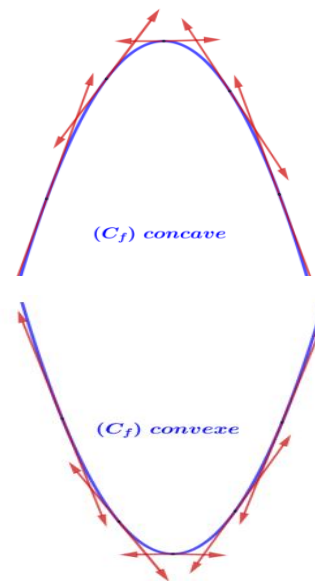
Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

Pour que la courbe (C_f) soit concave sur I , il faut et il suffit que :

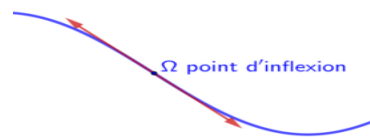
$$(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$$

Pour que la courbe (C_f) soit convexe sur I , il faut et il suffit que :

$$(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$$



Pour que le point $\Omega(a; f(a))$ soit un point d'inflexion de la courbe (C_f) , il faut et il suffit que la dérivée seconde f'' s'annule en a , et change de signe de part et d'autre de a .



Exercice d'application :

Etudier la concavité de la courbe (C_f) sachant que : $f(x) = x^3 + x^2$.

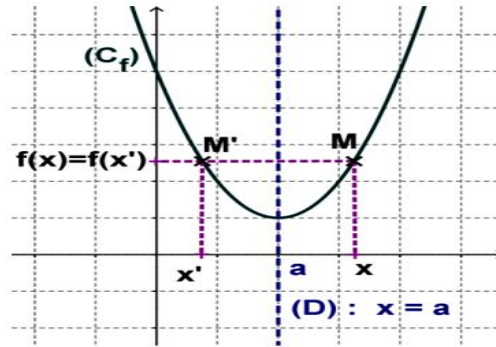
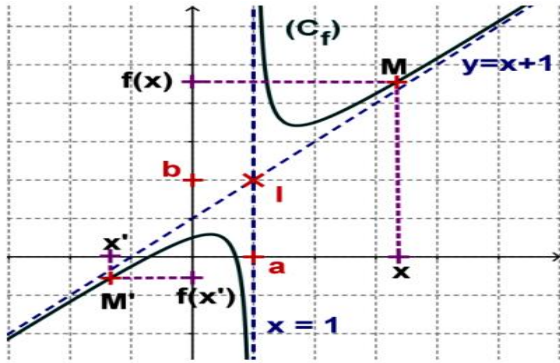
VIII) Eléments de symétrie d'une courbe :

1) Axe de symétrie

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (C_f) sa courbe représentative on a :

- La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe (C_f) :
si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f): 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f): f(2a - x) = f(x) \end{cases}$
- Le point $\Omega(a; b)$ ($a \in \mathbb{R}; b \in \mathbb{R}$) est un centre de symétrie de la courbe (C_f) :
si et seulement si : $\begin{cases} (\forall x \in D_f): 2a - x \in D_f \\ (\forall x \in D_f): f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$



Exemple 01(axe de symétrie) :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 2x + 1$,
Montrons que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de (C_f) la courbe de f .

En effet on a : $D_f = \mathbb{R}, (\forall x \in \mathbb{R}): 2a - x = 2 - x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(2 - x) &= (2 - x)^2 - 2(2 - x) + 1 \\ &= 4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 1 \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Exemple 02(Point de symétrie) :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.

Montrez que $\Omega(-2, 3)$ est un point de symétrie de la courbe (C_f) .

Application

1) Montrer que la droite (D) est l'axe de symétrie de (C_f) dans les deux cas :

(a) $f(x) = -3x^2 + 5x - 1$ $D: x = \frac{5}{6}$

(b) $f(x) = \frac{-3}{x^2 - 4x + 7}$ $D: x = 2$

2) Montrer que la droite Ω est le centre de symétrie de (C_f) dans les deux cas :

(a) $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ $\Omega(-1; 2)$

(b) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 + 3x + 3$ $\Omega(-1; 4)$

Exercice de synthèse :

I. On considère g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

- 2 a. Montrer, pour tout réel x , que $g'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.
b. Donner le tableau des variations de g .
c. En déduire, pour tout réel x , que $g(x) > 0$.

II. Soit f la fonction qui définit sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 + 1}$, et soit (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$. Interpréter géométriquement le résultat.
3. Montrer que la droite $(D): y = 2x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
4. a. Montrer, pour tout réel x , que $f'(x) = g(x)$.
b. Dresser le tableau des variations de f .
5. Calculer $f(1)$ puis tracer (C_f) .
6. a. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
b. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\sqrt{2}$ puis calculer $(f^{-1})'(\sqrt{2})$.
c. Tracer $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère.