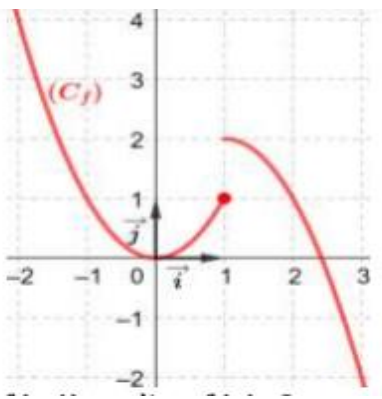


Le Cours		Remarques									
Activité : soutien des prérequis Calculer les limites suivantes : <table border="1"> <tbody> <tr> <td>a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+3}{x-1}$</td><td>b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x x -4x+3}{x^5-7x+2}$</td><td>c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$</td></tr> <tr> <td>d. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+3x-9}{x^2+x-6}$</td><td>e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$</td><td>f. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$</td></tr> <tr> <td>g. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+5x+6}{2-x}$</td><td>h. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+x-2}{-x^2-x+6}$</td><td>i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$</td></tr> </tbody> </table>			a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+3}{x-1}$	b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x x -4x+3}{x^5-7x+2}$	c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$	d. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+3x-9}{x^2+x-6}$	e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$	f. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$	g. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+5x+6}{2-x}$	h. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+x-2}{-x^2-x+6}$	i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$
a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x+3}{x-1}$	b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x x -4x+3}{x^5-7x+2}$	c. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+5x+6}{x+2}$									
d. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2+3x-9}{x^2+x-6}$	e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x+7}-3}{x-1}$	f. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2x^2+1}-3\sqrt{x+3}}{x+2}$									
g. $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2+5x+6}{2-x}$	h. $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x^2+x-2}{-x^2-x+6}$	i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$									
I. La continuité d'une fonction numérique											
1. La continuité en un point											
Lancement		Durée : 10 min									
Activité : On donne ci-dessous la courbe représentative d'une fonction f.  1. Déterminer graphiquement $f(-1)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. Que peut-on déduire ? 2. Déterminer graphiquement $f(1)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$. Que peut dire sur (Cf) au point $x_0 = 1$?											
Développement		Durée : 15 min									
Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I, et a un élément de I, On dit que f est continue au point a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ Exemple : - La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}; x \neq 3 \\ f(3) = 6 \end{cases}$ est continue en 3. En effet : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} x+3 = 6 = f(3)$. - La fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(3x)}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ est discontinue en 0. En effet : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} = 3 \neq f(0)$.		Le professeur signale que cette fonction est le prolongement de la fonction $x \rightarrow \frac{x^2-9}{x-3}$ sur $\mathbb{R}$									
Evaluation		Durée : 15 min									

Application :

Etudier la continuité des fonctions suivantes au point a .

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3-2x+1}{x-1}; x \neq 1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \text{ et } a = 1.$$

$$\begin{cases} g(x) = \frac{x\sqrt{x+2}-4}{x-2}; x \in [-2; 2[\cup]2; +\infty[\\ g(2) = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ et } a = 2$$

2. La continuité à droite – la continuité à gauche

Lancement

Durée : 15 min

Le professeur explique la continuité à gauche et à droite

Développement

Durée : 20 min

Définition :

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a; a + \alpha[$ où $\alpha > 0$.

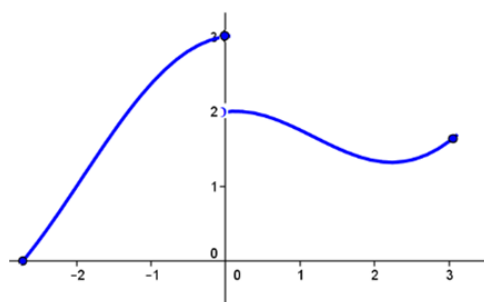
On dit que f est continue à droite de a si $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

- Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a - \alpha; a]$ où $\alpha > 0$.

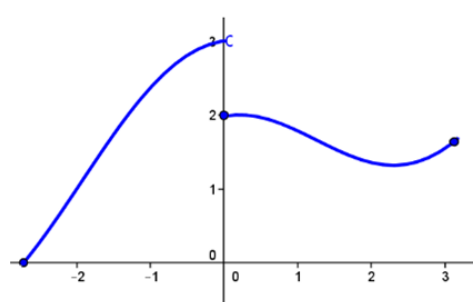
On dit que f est continue à gauche de a si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

Le professeur explique qu'une fonction peut être discontinue en un point mais continue à gauche ou à droite de ce point

La continuité à gauche



La continuité à droite



Propriétés :

$$f \text{ est continue en un point } a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

Exemple :

La fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$ est continue à droite en 1 est non continue en 1 à gauche.

Evaluation

Durée : 20 min

Application :

On considère f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} & ; x < 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

- Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
- F est-elle continue en 0

3. La continuité sur un intervalle

Lancement

Durée : 02 min

Le professeur explique que comme on a passé de la limite en un point à la limite sur un intervalle, on va faire la même chose avec la continuité sur un intervalle puisque c'est une limite

Développement

Durée : 40 min

Définition :

On dit que f est continue sur l'intervalle ouvert $]a; b[$ si f est continue en tout point de $]a; b[$.

On dit que f est continue sur l'intervalle $[a, b]$ si f est continue en tout point de $]a; b[$ et continue à droite de a et à gauche de b .

Remarque :

On définit de même manière la continuité sur les intervalles $[a, b[$, $]a, b]$,

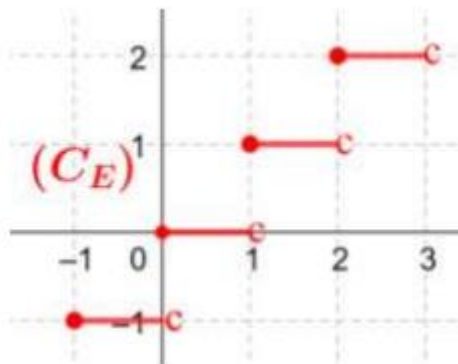
$[a, +\infty[$, et $]-\infty, b]$

Exemple : (Fonction partie entière)

La fonction partie entière est la fonction qui, à tout réel x , associe l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. On note la partie entière de x par $E(x)$ ou $[x]$.

$E(3,2) = 3$ Parce que $3 \leq 3,2 < 4$ et $E(-1,2) = -2$ parce que $-2 \leq -1,2 < -1$.

o La courbe de la fonction $x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[-1; 3[$ est :



La fonction $x \mapsto E(x)$ est continue sur l'intervalle $[-1; 0]$ du fait qu'elle est continue en tout point de $[-1; 0]$ et à droite en -1 car $\lim_{x \rightarrow -1^+} E(x) = -1 = E(-1)$.

La fonction $x \mapsto E(x)$ n'est pas continue sur l'intervalle $]1; 3[$ du fait qu'elle n'est pas continue en 1 car $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1 = E(1)$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0 \neq E(1)$.

Propriétés :

Les fonctions suivantes sont continues sur chaque intervalle inclut dans leurs domaines de définition : polynomiale, rationnelle, trigonométrique et $x \rightarrow \sqrt{x}$

Exemple :

- La fonction $f(x) = \frac{2x^2 - x + 5}{x - 1}$ est continue sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car c'est une fonction rationnelle
- La fonction $f: x \mapsto x^3 + 2x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ parce qu'elle est une fonction polynômiale.

Propriétés :

1. Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , on a :

- $f + g$, $f \times g$, kf et f^n sont continues sur I ($k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$)
- Si $\forall x \in I: g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I
- Si $\forall x \in I: f(x) \geq 0$ alors $\sqrt{f}$ est continue sur I

Exemple :

- La fonction $f: x \mapsto 2x^2 - x + \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que somme de deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$ qui sont $x \mapsto 2x^2 - x$ et $x \mapsto \sin(x)$.
- On considère $g: x \mapsto \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$. On a :
 - La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est continue sur $]-\infty; 1[$ [puisque'elle est une fonction polynomiale et on a $(\forall x \in]-\infty; 1[): x^2 + 1 > 0$. Ainsi $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ est continue sur $]-\infty; 1[$.
 - La fonction $x \mapsto x + 1$ est continue sur $]-\infty; 1[$ et on a $(\forall x \in]-\infty; 1[): x + 1 \neq 0$.
 Il en résulte que la fonction g est continue sur $]-\infty; 1[$.

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions telles que :

f est continue sur I et g est continue sur J tel que: $f(I) \subset J$ Alors $g \circ f$ est continue sur I

Exemple :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \cos(x^2 + 2)$

On a les fonctions : $f_1: x \mapsto \cos(x)$ et $f_2: x \mapsto x^2 + 2$ sont continue sur $\mathbb{R}$
et on a $f_2(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ alors la fonction $f = f_1 \circ f_2$ est continue sur $\mathbb{R}$

Remarque :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle : $J \subset I$ telle que : $\forall x \in J : g(x) = f(x)$
On dit que g est la restriction de f sur J
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel tel que :
 $a \notin I$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \in \mathbb{R}$,
La fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \in D_f \\ g(a) = l \end{cases}$ est une fonction continue sur $I \cup \{a\}$, appelée le prolongement de f par continuité en a

Exemple :

La fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Alors la fonction g définie par $\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \in \mathbb{R}^* \\ g(0) = 1 \end{cases}$ est le prolongement

de f en 0 ont dit aussi que g prolonge continûment f en 0

Evaluation

Durée : 20 min

Application :

Montrer que f est continue sur I dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 + 1 + \sin(x)$ et $I = \mathbb{R}$.

2) $f(x) = \cos(x) \times \sqrt{4x^2 + 5}$ et $I = \mathbb{R}$.

3) $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+x-2}$ et $I =]2; +\infty[$

II. L'image d'un intervalle par une fonction continue

1. Image d'un segment – Image d'un intervalle

Lancement

Durée : 20 min

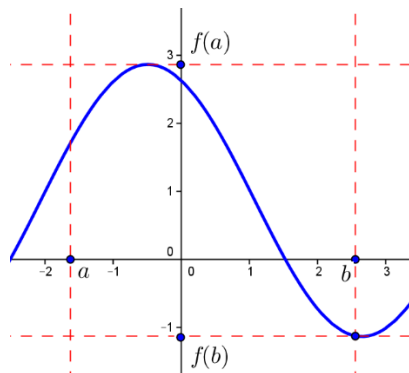
Le professeur explique que la monotonie de la fonction et ses extremums ont un impact direct sur l'image d'un intervalle

Développement

Durée :30 min

Propriétés :

- L'image d'un segment par une fonction continue est un segment
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle



Le professeur explique qu'on n'a pas toujours la relation
 $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$

Propriétés :

Soit f une fonction continue et **strictement** monotone sur un intervalle I et a et b sont deux éléments de I , on a :

L'intervalle I	$f(I)$	
	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a, +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$]a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$] -\infty, b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$

Le professeur fait remarquer que si f est continue sur $[a; b]$ alors :

$$\forall k f([a, b]), \quad \exists c \in [a, b]: \quad f(c) = k$$

Et démontre la relation à l'aide d'un schéma



Il faut d'abord vérifier les conditions qu'il faut avant de passer l'image d'un intervalle

Remarque :

Si f est continue sur $[a; b]$ et m et M sont respectivement sa valeur minimale et maximale sur $[a; b]$ alors : $f([a, b]) = [m, M]$

Exemple :

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x - 1$

La fonction f est strictement décroissante sur $] -\infty; 2]$ et strictement croissante sur $[2; +\infty[$. On a :

- $f([2; 4]) = [f(2); f(4)] = [-5; -1]$
- $f([2; +\infty)) = [f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [= [-5; +\infty[$

- $f([-1; 1]) = [f(1); f(-1)] = [-4; 4]$
- $f(]-\infty; 2]) = [f(2); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$

Evaluation

Durée : 20 min

Application :

Soit f une fonction définie par $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$

1. Déterminer D_f .
2. Etudier la monotone de f .
3. Déterminer $f([0,1])$; $f(]4, +\infty[)$ et $f(]-\infty, 4])$

Exercice :

On considère f la fonction définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2$.

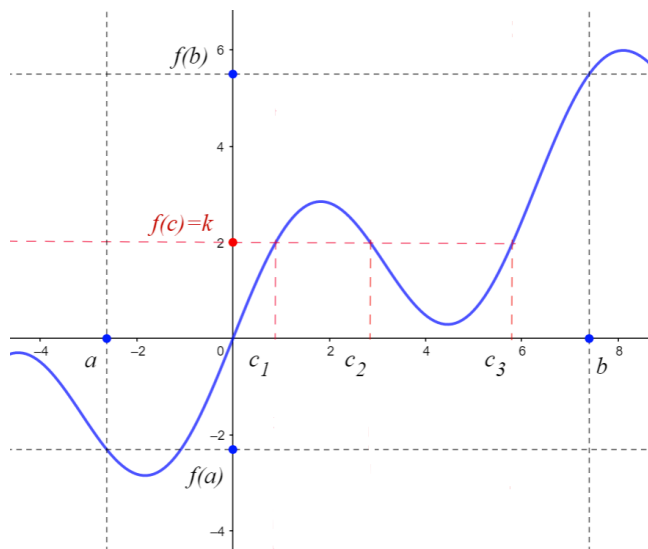
1. Dresser le tableau de variation de la fonction.
2. Déterminer les images des intervalles suivants
 $]1; 0]$; $[1; 2]$; $[-1; 2[$; $[1; +\infty[$ par f .

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Lancement

Durée : 10 min

Le professeur explique que qu'il existe toujours un antécédent du nombre k par la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ sur lequel elle est continue : $\exists c \in [a; b]: f(c) = k$ cette équation est l'application du théorème des valeurs intermédiaires



Développement

Durée : 40 min

Théorème des valeurs intermédiaires :

Pour toute fonction f définie et continue sur $[a; b]$, et tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$, c'est-à-dire : $\forall k \in f([a, b]), \exists c \in]a, b[: f(c) = k$

Exemple :

Montrons que l'équation (E): $x^2 - \sqrt{x+2} = 2$ admet au moins une solution sur $[-2; 0]$.

On considère f la fonction définie par $f(x) = x^2 - \sqrt{x+2}$.

L'équation (E) est équivalente à l'équation $f(x) = 2$.

La fonction f est continue sur $[-2; 0]$ comme somme de deux fonctions continues et on a $f(-2) = 4$ et $f(0) = -\sqrt{2}$.

Puisque $f(0) \leq 2 \leq f(-2)$, alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation (E) admet au moins une solution sur $[-2; 0]$

Cas particulier: théorème de Bolzano

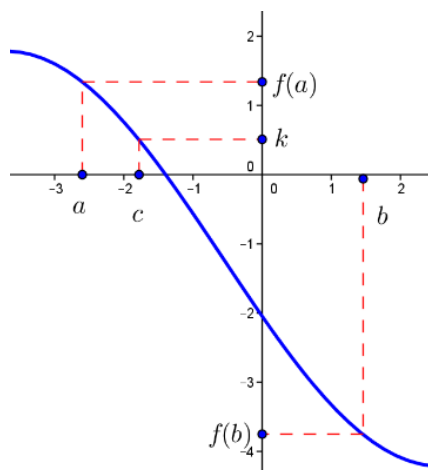
Si f est continue sur $[a, b]$ et change de signe sur cet intervalle, alors f s'annule en (au moins) un point c de $]a, b[$, c'est-à-dire :

f continue sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in]a; b[: f(c) = 0$

Conséquence :

Si f est continue et **strictement monotone** sur $[a; b]$ alors la solution de l'équation $f(c) = k$ est **unique**, c'est-à-dire :

$\forall k \in f([a, b]), \exists ! c \in]a, b[: f(c) = k$



Exemple :

On considère la fonction : $f(x) = x^3 - 3x - 5$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique c sur $[2; 4]$
2. Vérifier que le nombre 3 est le centre de l'intervalle $[2; 4]$ puis calculer $f(3)$, en déduire que $2 < c < 3$
3. Répéter la même méthode pour trouver un encadrement de c plus précis

Méthode de dichotomie :

Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ telle que : $f(a) \times f(b) < 0$

Et soit c la solution unique de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a; b]$

▪ Si on a : $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ alors $a < c < \frac{a+b}{2}$ et ainsi on peut répéter le même procédé sur $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$

▪ Si on a : $f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$ alors $\frac{a+b}{2} < c < b$ et ainsi on peut répéter le même procédé sur $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$

Le professeur explique quand f change de signe elle s'annule forcément en un point

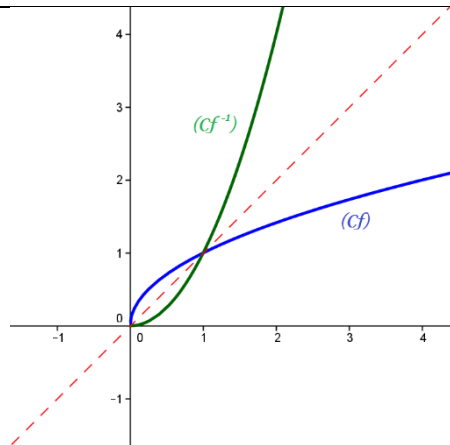
Quand la fonction est strictement monotone alors elle ne peut pas repasser par la même image une seconde fois alors la solution de l'équation $f(c)=k$ est unique

Pour trouver une précision sur c il suffit de restreindre à chaque fois l'intervalle de telle sorte d'avoir toujours $f(a) \times f(b) < 0$

Il ya une autre méthode appelée : encadrement par balayage, qui consiste à utiliser le tableau de valeur de f des valeurs rapprochées de la solution de $f(x)=0$

Evaluation		Durée : 30 min
<u>Application :</u> Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ 1. Dresser le tableau de variation de f 2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique c dans $\mathbb{R}$ 3. Vérifier que $c \in]0; 1[$ 4. En utilisant la méthode de dichotomie, donner un encadrement du nombre c d'amplitude 25×10^{-2}		
III. La fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone		
1. Propriétés de la fonction réciproque		
Lancement		Durée : min
Le professeur explique que la fonction réciproque d'une fonction est la réciproque d'une fonction f s'obtient en intervertissant les valeurs de x et de y puis en isolant y. Elle se note f^{-1} On obtient la courbe d'une réciproque en faisant une symétrie de la courbe de f par rapport à la 1^{ère} bissectrice du plan <u>Exemple :</u> $f(2) = 3$ alors $f^{-1}(3) = 2$, alors graphiquement on a $A(2; 3) \in (C_f)$ et $B(3; 2) \in (C_{f^{-1}})$ <u>Activité :</u> On considère la fonction f définie par : $f(x) = x^2 - 2x$ sur l'intervalle $I = [1, 3]$ 1. Montrer que f est continue et strictement croissante sur I 2. Déterminer J tel que : $J = f(I)$ 3. Soient $x \in J$ et $y \in I$, montrer que $f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{x + 1}$		
Développement		Durée : 40 min
<u>Définition :</u> Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I, et soit J l'image de l'intervalle I par la fonction f. On appelle fonction réciproque de f la fonction notée f^{-1} définie sur J par : $\forall y \in J: f^{-1}(y) = x$ tel que x vérifie : $\exists x \in I: f(x) = y$		
<u>Propriétés :</u> Soit f une fonction continue et strictement monotone sur l'intervalle I et f^{-1} sa fonction réciproque, on a : ▪ f^{-1} est une fonction continue sur l'intervalle $f(I)$ ▪ f^{-1} est strictement monotone sur $f(I)$ et elle a la même monotonie que la fonction f sur I ▪ $\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$ ▪ $\forall x \in I, f^{-1} \circ f(x) = x$ ▪ $\forall x \in f(I), f \circ f^{-1}(x) = x$ ▪ La courbe de f^{-1} est la symétrique de la courbe de f par rapport à la droite d'équation : $y = x$ dans le repère orthonormé		

2^{ème} année du baccalauréat sc. Physiques et Svt



Exemple :

La fonction $f: x \mapsto \sqrt{x} + 2$ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, donc f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante sur $f([0, +\infty[) = [2, +\infty[$.

Déterminons l'expression de f^{-1} :

Soient $y \in [0, +\infty[$ et $x \in [2, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} + 2 = x \\ &\Leftrightarrow \sqrt{y} = x - 2 \\ &\Leftrightarrow y = (x - 2)^2. \end{aligned}$$

Donc $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y = (x - 2)^2$.

Il en résulte : $(\forall x \in [2, +\infty[) f^{-1}(x) = (x - 2)^2$.

Evaluation

Durée : 30 min

Application :

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2x - 4}$.

1. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
2. Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

2. La fonction racine n^{ième}

Lancement

Durée : 10 min

Le professeur rappelle que $x, y \in \mathbb{R}^+ : y^2 = x \Leftrightarrow y = \sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$ la racine carrée

Mais que peut-on dire sur la solution de l'équation : $y^3 = x$?

La solution de cette équation s'appelle la racine cubique et on la note : $\sqrt[3]{x}$

Dans le cas général, on a : $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ ; \forall n \in \mathbb{N}^* : x = y^n \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = y$

Développement

Durée : min

Définition :

Soit n un entier naturel non nul

La fonction réciproque de la fonction définie par : $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto x^n$

est appelée fonction racine n -ième notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et on écrit $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

Le professeur explique
qu'on peut aussi

Remarques :

pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ on a :

- $\sqrt[n]{x} = x$
- $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$
- $\sqrt[3]{x}$ est appelée la racine cubique de x .

Conséquences

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) x^n = y \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{y}$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

Exemples :

$$-\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2 - \sqrt[5]{5} > \sqrt[5]{3} \text{ parce que } 5 > 3$$

$$-\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{x} = +\infty$$

Opérations sur les racines n-ième

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a :

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
- Si $b \neq 0$ alors $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ et $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ et $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

Exemple :

$$\text{Simplifions le nombre : } A = \frac{\sqrt[4]{32} \times \sqrt[6]{27} \times \sqrt[4]{108}}{\sqrt[4]{144}}$$

utiliser l'identité remarquable dans l'exemple :

$$x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x^2 + 3x + 9) = 0$$

Le professeur démontre les propriétés de la fonction racine nième :

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \text{ car : } \left(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}\right)^{mn} = a \text{ et } \left(\sqrt[mn]{a}\right)^{mn} = a$$

Evaluation

Durée : 25 min

Application :

1. Simplifier $A = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{64}}$; $B = \sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}$ et $C = \frac{15\sqrt[3]{3^5} \times \sqrt[3]{9} \times (\sqrt[5]{9})^3}{\sqrt[5]{3}}$.
2. Mettre en ordre croissant les nombres $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt{5}$

3. Puissance rationnelle d'un nombre strictement positif

Lancement

Durée : min

Le professeur explique que toutes les propriétés de la puissance sont valables pour un nombre rationnel r tel que : $r = \frac{m}{n}$

Développement

Durée : min

Définition :

Soit $x \in]0; +\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}^*$

On appelle puissance rationnelle du nombre x d'exposant r le nombre noté x^r défini par : $x^r = \sqrt[n]{x^m}$ où $r = \frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$)

Remarque :

- Si $r = \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ alors : $x^r = \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n']{x^{m'}}$
- $\forall r, r' \in \mathbb{Q}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^* : x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$
- $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^* : x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $\forall m \in \mathbb{Z}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^* : x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (x^{\frac{1}{n}})^m$

Exemple :

$x \in]0; +\infty[: x^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{x^5} ; \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

Propriétés :

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $r, r' \in \mathbb{Q}^*$ on a :

- $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} ; x^r \times y^r = (x \times y)^r$
- $(x^r)^{r'} = x^{rr'} ; \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$
- $x^{-r} = \frac{1}{x^r} ; \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$

Exemple :

Simplifier les nombres suivants : $A = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{1}{4}}} \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}}$

Evaluation

Durée : min

Application :

Ecrire sous forme d'une puissance rationnelle les nombres

$$A = \frac{\sqrt[3]{4} \times 8^{\frac{1}{2}} \times \sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{4}} ; B = \frac{(27)^{\frac{2}{7}} \times (81)^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{17}{3}}}$$

La même application précédente, sauf qu'ici on va utiliser la puissance rationnelle

Le professeur propose un résumé sous forme de carte mentale pour faciliter la retenue du cours, il l'a fait comme une activité collective avec les élèves sur le tableau qu'ils copient ensuite dans leurs cahiers dans une page séparée :