

Notions de logique

EXERCICE 1

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :

- Le carré de tout réel est positif.
- Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
- Il existe un entier multiple de tous les autres
- Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.
- T est une homothétie (où T est une transformation du plan $\mathcal{P}$).
- f est constante sur $\mathbb{R}$ (où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).
- f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Donner la négation des propositions suivantes :

- Toutes les voitures rapides sont rouges.
- Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens.
- $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists a \in \mathbb{R}), x < a < x + 1$.
- $(\forall n \in \mathbb{N}) (\forall m \in \mathbb{N}), (n > m \Rightarrow n \geq m + 1)$.
- $(\forall x \in \mathbb{R}), (x \geq 1 \text{ ou } x < 1)$.

EXERCICE 3 Soient les quatre propositions suivantes :

$$(P) (\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}), x + y > 0 \qquad (Q) (\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in \mathbb{R}), x + y > 0$$

$$(R) (\forall x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}), x + y > 0 \qquad (S) (\exists x \in \mathbb{R}) (\forall y \in \mathbb{R}), y^2 > x$$

1. Les propositions P , Q , R et S sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

EXERCICE 4

1. Soient x et y deux réels. Montrer que : $\left(x > 1 \text{ et } y > 1 \text{ et } \frac{x}{1+x^2} = \frac{y}{1+y^2}\right) \Rightarrow x = y$.
2. Soient x un réel. Montrer que : $|x - 1| < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$
3. Soit n un entier naturel non nul.
 - a. Montrer que : n n'est pas premier $\Rightarrow 2^n - 1$ n'est pas premier.
 - b. L'implication suivante est-elle vraie ? n est premier $\Rightarrow 2^n - 1$ est premier.

EXERCICE 5

1. Soit a un réel. Montrer que : $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.
2. Soient a, b, x et y des réels non nuls. Montrer que : $\frac{1}{x^2+y^2} > a^2 + b^2 \Rightarrow ax + by \neq 1$.
3. Soient m et n deux entiers naturels. Montrer que : mn est impair $\Rightarrow m$ et n sont impairs.
4. Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Montrer que : $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8 $\Rightarrow n$ est pair.

EXERCICE 6 Montrer que :

1. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca.$
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, ||x| - |y|| \leq |x - y|.$
4. $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, |a - b| \leq c \Rightarrow |a| \leq |b| + c.$
5. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1 \Leftrightarrow x = y$

EXERCICE 7

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$|x + 1| + |2x - 3| = 5x + 6$$

$$x^2 - 3|x - 4| + 2 = 0$$

$$|x - 1| + |2x - 3| = |5x - 10|$$
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{9x^2 + x - 4} > x + 8.$

EXERCICE 8

1. Montrer que $n(n^2 + 3)$ est pair pour tout entier n .
2. Montrer que le carré de tout entier est de la forme $3k$ ou $3k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 9

1. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
2. Soient $a \in \mathbb{Q}$ et $b \notin \mathbb{Q}$.
 - a. Montrer que $a + b \notin \mathbb{Q}$.
 - b. Montrer que si $a \neq 0$, alors $ab \notin \mathbb{Q}$.
3. Montrer par l'absurde que : $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, nm = 1 \Rightarrow n = 1.$

EXERCICE 10

Montrer par récurrence que:

- | | |
|--|---|
| $\triangleright \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ | $\triangleright \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ |
| $\triangleright \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ | $\triangleright \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n (-1)^k k = \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$ |
| $\triangleright \forall n \in \mathbb{N}, 7 \text{ divise } 2^{3n+1} + 5$ | $\triangleright \forall n \in \mathbb{N}, 7 \text{ divise } 2^{3n} - 5$ |
| $\triangleright \forall n \in \mathbb{N}, 11 \text{ divise } 10^n - (-1)^n$ | $\triangleright \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, n^2 \leq 2^n$ |

EXERCICE 11

1. Soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + x)^n \geq 1 + nx.$
2. La factorielle d'un entier naturel non nul n , notée $n!$, est le produit des nombres entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à n . c'est-à-dire $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$.
 - a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$
 - b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, (n + 1)! \geq \sum_{k=1}^n (k!).$