

Le Cours				Remarques																																			
I. Proposition –Fonction propositionnelle																																							
Lancement				Durée : 10 min																																			
Activité : Mettre une croix (x) dans la case qui convient : <table><tr><th>Textes mathématiques</th><th>Vrai</th><th>Faux</th><th>On ne peut pas décider sa vérité</th><th>N'a pas de sens</th></tr><tr><td>• $-15 \times 2 = 30$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>• $(x \in \mathbb{R}) : x^2 > x$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>• $-6 \notin \mathbb{N}$</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>• La somme de deux nombres impairs est un nombre pair</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>• Chaque nombre impair et un nombre premier.</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>• 8</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr></table>				Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité	N'a pas de sens	• $-15 \times 2 = 30$					• $(x \in \mathbb{R}) : x^2 > x$					• $-6 \notin \mathbb{N}$					• La somme de deux nombres impairs est un nombre pair					• Chaque nombre impair et un nombre premier.					• 8					
Textes mathématiques	Vrai	Faux	On ne peut pas décider sa vérité	N'a pas de sens																																			
• $-15 \times 2 = 30$																																							
• $(x \in \mathbb{R}) : x^2 > x$																																							
• $-6 \notin \mathbb{N}$																																							
• La somme de deux nombres impairs est un nombre pair																																							
• Chaque nombre impair et un nombre premier.																																							
• 8																																							
Développement				Durée : 15 min																																			
Définition : ➤ Une proposition (ou assertion) est une phrase ou une expression qui a un sens et qui est soit vraie, soit fausse, mais pas les deux en même temps. On note souvent une proposition par les lettres P, Q ou R ... ➤ On appelle fonction propositionnelle tout énoncé qui contient une variable (ou plusieurs variables) d'un ensemble, elle devienne proposition chaque fois qu'on remplace la variable par un élément de cet ensemble. Exemple : ○ " Le nombre 2022 est pair " est une proposition vraie. ○ " Tout carrée est un parallélogramme " est une proposition vraie. ○ " Tout nombre pair es divisible par 4 " est une proposition fausse. ○ "$x + y = z$ " n'est pas une proposition. ○ "$P(x) : x \in \mathbb{R}, x^2 - x < 0$ " est une fonction propositionnelle. $P(0)$ est une proposition fausse mais $P\left(\frac{1}{2}\right)$ est une proposition vraie ○ "$P(n, m): n + m = 10$ avec n, m de $\mathbb{N}$ " est une fonction propositionnelle $P(4; 6)$ est une proposition vraie mais $P(2; 7)$ est une proposition est fausse.																																							
Evaluation				Durée : 15 min																																			
Application : Déterminer la vérité de chacun des propositions suivantes : • $P: " \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{7}{3} "$. • $Q: " \sqrt{3 + \sqrt{5}} \times \sqrt{3 - \sqrt{5}} \in \mathbb{N} "$. • <math>R : "L'équation $x^2 - 3x + 5 = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$."</math>																																							

Lycée Collégial Complexe Pédagogique Aghbalou	Notions de logique mathématique	Professeur : Mustapha LAGUSIBY Année Scolaire :2023/2024
--	------------------------------------	---

1^{ère} année du baccalauréat

II) Les quantificateurs

Lancement	Durée : 15 min
Activité : Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux fonctions propositionnelles telles que : $A(x): "(x \in \mathbb{R}) ; x^2 + 1 > 0"$ $B(x): "(x \in \mathbb{R}) ; x^2 + 2x - 3 = 0"$ 1) Est-ce que $A(x)$ est vraie pour tous les nombres réels ? Justifier. 2) Vérifier que $B(x)$ est vraie pour certaines valeurs de x (on prend $x = 1 ; x = -3$) et fausse pour d'autres valeurs ($x = 0$).	
Développement	Durée : 20 min
Définition : Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle tel que x est un élément d'un ensemble E. • Si $P(x)$ est vraie pour tout élément de E on écrit : $(\forall x \in E): P(x)$. Le symbole "$\forall$" s'appelle quantificateur universel et il se lit : pour tout ou quel que soit. • S'il existe au moins un élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit : $(\exists x \in E): P(x)$. Le symbole "$\exists$" s'appelle quantificateur existentiel et il se lit : il existe au moins. • S'il existe un unique élément de E pour lequel $P(x)$ est vraie on écrit : $(\exists! x \in E): P(x)$. Le symbole "$\exists!$" s'appelle quantificateur existentiel de l'unicité et il se lit : il existe un unique. Exemple : ○ $P: "(\forall x \in \mathbb{R}): 2x + 1 = 0"$ est une proposition fausse parce que si $x = 0$, alors $2 \times 0 + 1 = 0$ est faux. ○ $Q: "(\exists n \in \mathbb{N}): 2n - 4 = 0"$ est une proposition vraie car l'entier $n=2$ vérifie $2n - 4 = 0$. ○ $R: "(\exists! x \in \mathbb{R}): x^2 - 2x + 1 = 0"$ est une proposition vraie parce que 1 est la seule solution de l'équation $x^2 - 2x + 1 = 0$.	
Evaluation	Durée : 20 min
Application : Réécrire les propositions suivantes en utilisant les quantificateurs logiques. 1. P_1 : "La valeur absolue de tout nombre réel non nul est strictement positive". 2. P_2 : "Il existe au moins un nombre réel x tel que $2x^2 - 3x = 0$". 3. P_3 : "L'équation $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ admet une unique solution réelle". 4. P_4 : "Pour tout nombre réel x, il existe un unique entier N tel que $N \leq x < N + 1$". Remarque : • On peut inverser deux quantificateurs universels ou deux quantificateurs existentiels. • On ne peut a priori pas inverser un quantificateur existentiel avec un quantificateur universel. Exemple : ○ Les propositions $"(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): x + y = 2"$ et $"(\forall y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}): x + y = 2"$ ont la même valeur de vérité. ○ Les propositions $"(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}): x + y = 2"$ et $"(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}): x + y = 2"$ n'ont pas la même valeur de vérité. La première est fausse mais la deuxième est vraie.	

Evaluation		Durée : 02 min																																																									
Exercice ①: Déterminer la valeur de vérité de chacun des propositions suivantes : P₁ : "(∃x ∈ ℝ): x² + x - 1 = 0". P₂ : "(∀x ∈ ℝ): x² + 3x + 7 < 0". P₃ : "(∀x ∈ ℝ)(∃y ∈ ℝ): x ≤ y". P₄ : "(∃y ∈ ℝ)(∀x ∈ ℝ): x ≤ y". P₅ : "(∀y ∈ ℝ)(∀x ∈ ℝ): x ≤ y". P₆ : "(∀x ∈ ℝ)(∀y ∈ ℝ)": x ≤ y". <tr><td colspan="3">III) OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :</td></tr> <tr><td colspan="3">1. La négation d’une proposition :</td></tr> <tr><td colspan="2">Développement</td><td></td></tr> <tr><td colspan="2"> Définition : La négation d’une proposition P, noté $\bar{P}$ ou $\neg P$, est la proposition qui vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie. </td><td><table><tr><td>P</td><td>$\bar{P}$</td><td rowspan="3">Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation.</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td></tr></table></td></tr> <tr><td colspan="2"> Exemple : La négation de la proposition 3 > 2 est 3 ≤ 2 . La négation de la proposition (-2)² = -4 est (-2)² ≠ -4. La négation de la proposition -3 ∈ ℕ est -3 ∉ ℕ. </td><td></td></tr> <tr><td colspan="3"> Propriétés : La négation de la proposition " (∀x ∈ E): P(x) " est " (∃x ∈ E): $\bar{P}(x)$". La négation de la proposition " (∃x ∈ E): P(x) " est " (∀x ∈ E): $\bar{P}(x)$". La négation de la proposition " (∀x ∈ E)(∃y ∈ E): P(x, y) " est : " (∃x ∈ E)(∀y ∈ E): $\bar{P}(x, y)$". La négation de la proposition : " (∃x ∈ E)(∀y ∈ E): P(x, y) " est : " (∀x ∈ E)(∃y ∈ E): $\bar{P}(x, y)$". </td></tr> <tr><td colspan="2"> Remarques : Les propositions P et $\bar{\bar{P}}$ ont même valeur de vérité. On a le tableau suivant : <table><tr><td>Le symbole</td><td>></td><td><</td><td>≥</td><td>≤</td><td>=</td><td>∈</td></tr><tr><td>Sa négation</td><td>≤</td><td>≥</td><td><</td><td>></td><td>≠</td><td>∉</td></tr></table></td><td></td></tr> <tr><td colspan="2"> Exemple : <table><tr><th>La proposition P</th><th>La négation $\bar{P}$</th></tr><tr><td> ○ (∀x ∈ ℝ): x ≥ 1 </td><td> ○ (∃x ∈ ℝ): x < 1 </td></tr><tr><td> ○ (∃n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ </td><td> ○ (∀n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ </td></tr><tr><td> ○ (∀x ∈ ℝ): x² + x + 1 ≥ 0 </td><td> ○ (∃x ∈ ℝ): x² + x + 1 < 0 </td></tr><tr><td> ○ (∀n ∈ ℕ) (∃m ∈ ℕ) : m ≥ n </td><td> ○ (∃n ∈ ℕ) (∀m ∈ ℕ) : m < n </td></tr></table></td><td></td></tr> <tr><td colspan="2">Evaluation</td><td>Durée : 20 min</td></tr>		III) OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :			1. La négation d’une proposition :			Développement			Définition : La négation d’une proposition P, noté $\bar{P}$ ou $\neg P$, est la proposition qui vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.		<table><tr><td>P</td><td>$\bar{P}$</td><td rowspan="3">Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation.</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td></tr></table>	P	$\bar{P}$	Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation.	V	F	F	V	Exemple : La négation de la proposition 3 > 2 est 3 ≤ 2 . La négation de la proposition (-2)² = -4 est (-2)² ≠ -4. La négation de la proposition -3 ∈ ℕ est -3 ∉ ℕ.			Propriétés : La négation de la proposition " (∀x ∈ E): P(x) " est " (∃x ∈ E): $\bar{P}(x)$". La négation de la proposition " (∃x ∈ E): P(x) " est " (∀x ∈ E): $\bar{P}(x)$". La négation de la proposition " (∀x ∈ E)(∃y ∈ E): P(x, y) " est : " (∃x ∈ E)(∀y ∈ E): $\bar{P}(x, y)$". La négation de la proposition : " (∃x ∈ E)(∀y ∈ E): P(x, y) " est : " (∀x ∈ E)(∃y ∈ E): $\bar{P}(x, y)$".			Remarques : Les propositions P et $\bar{\bar{P}}$ ont même valeur de vérité. On a le tableau suivant : <table><tr><td>Le symbole</td><td>></td><td><</td><td>≥</td><td>≤</td><td>=</td><td>∈</td></tr><tr><td>Sa négation</td><td>≤</td><td>≥</td><td><</td><td>></td><td>≠</td><td>∉</td></tr></table>		Le symbole	>	<	≥	≤	=	∈	Sa négation	≤	≥	<	>	≠	∉		Exemple : <table><tr><th>La proposition P</th><th>La négation $\bar{P}$</th></tr><tr><td> ○ (∀x ∈ ℝ): x ≥ 1 </td><td> ○ (∃x ∈ ℝ): x < 1 </td></tr><tr><td> ○ (∃n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ </td><td> ○ (∀n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ </td></tr><tr><td> ○ (∀x ∈ ℝ): x² + x + 1 ≥ 0 </td><td> ○ (∃x ∈ ℝ): x² + x + 1 < 0 </td></tr><tr><td> ○ (∀n ∈ ℕ) (∃m ∈ ℕ) : m ≥ n </td><td> ○ (∃n ∈ ℕ) (∀m ∈ ℕ) : m < n </td></tr></table>		La proposition P	La négation $\bar{P}$	○ (∀x ∈ ℝ): x ≥ 1	○ (∃x ∈ ℝ): x < 1	○ (∃n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$	○ (∀n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$	○ (∀x ∈ ℝ): x² + x + 1 ≥ 0	○ (∃x ∈ ℝ): x² + x + 1 < 0	○ (∀n ∈ ℕ) (∃m ∈ ℕ) : m ≥ n	○ (∃n ∈ ℕ) (∀m ∈ ℕ) : m < n		Evaluation		Durée : 20 min
III) OPERATIONS SUR LES PROPOSITIONS :																																																											
1. La négation d’une proposition :																																																											
Développement																																																											
Définition : La négation d’une proposition P, noté $\bar{P}$ ou $\neg P$, est la proposition qui vraie si P est fausse et qui est fausse si P est vraie.		<table><tr><td>P</td><td>$\bar{P}$</td><td rowspan="3">Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation.</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td></tr></table>	P	$\bar{P}$	Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation.	V	F	F	V																																																		
P	$\bar{P}$	Ce tableau est appelé le tableau de vérité de la négation.																																																									
V	F																																																										
F	V																																																										
Exemple : La négation de la proposition 3 > 2 est 3 ≤ 2 . La négation de la proposition (-2)² = -4 est (-2)² ≠ -4. La négation de la proposition -3 ∈ ℕ est -3 ∉ ℕ.																																																											
Propriétés : La négation de la proposition " (∀x ∈ E): P(x) " est " (∃x ∈ E): $\bar{P}(x)$". La négation de la proposition " (∃x ∈ E): P(x) " est " (∀x ∈ E): $\bar{P}(x)$". La négation de la proposition " (∀x ∈ E)(∃y ∈ E): P(x, y) " est : " (∃x ∈ E)(∀y ∈ E): $\bar{P}(x, y)$". La négation de la proposition : " (∃x ∈ E)(∀y ∈ E): P(x, y) " est : " (∀x ∈ E)(∃y ∈ E): $\bar{P}(x, y)$".																																																											
Remarques : Les propositions P et $\bar{\bar{P}}$ ont même valeur de vérité. On a le tableau suivant : <table><tr><td>Le symbole</td><td>></td><td><</td><td>≥</td><td>≤</td><td>=</td><td>∈</td></tr><tr><td>Sa négation</td><td>≤</td><td>≥</td><td><</td><td>></td><td>≠</td><td>∉</td></tr></table>		Le symbole	>	<	≥	≤	=	∈	Sa négation	≤	≥	<	>	≠	∉																																												
Le symbole	>	<	≥	≤	=	∈																																																					
Sa négation	≤	≥	<	>	≠	∉																																																					
Exemple : <table><tr><th>La proposition P</th><th>La négation $\bar{P}$</th></tr><tr><td> ○ (∀x ∈ ℝ): x ≥ 1 </td><td> ○ (∃x ∈ ℝ): x < 1 </td></tr><tr><td> ○ (∃n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$ </td><td> ○ (∀n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ </td></tr><tr><td> ○ (∀x ∈ ℝ): x² + x + 1 ≥ 0 </td><td> ○ (∃x ∈ ℝ): x² + x + 1 < 0 </td></tr><tr><td> ○ (∀n ∈ ℕ) (∃m ∈ ℕ) : m ≥ n </td><td> ○ (∃n ∈ ℕ) (∀m ∈ ℕ) : m < n </td></tr></table>		La proposition P	La négation $\bar{P}$	○ (∀x ∈ ℝ): x ≥ 1	○ (∃x ∈ ℝ): x < 1	○ (∃n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$	○ (∀n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$	○ (∀x ∈ ℝ): x² + x + 1 ≥ 0	○ (∃x ∈ ℝ): x² + x + 1 < 0	○ (∀n ∈ ℕ) (∃m ∈ ℕ) : m ≥ n	○ (∃n ∈ ℕ) (∀m ∈ ℕ) : m < n																																																
La proposition P	La négation $\bar{P}$																																																										
○ (∀x ∈ ℝ): x ≥ 1	○ (∃x ∈ ℝ): x < 1																																																										
○ (∃n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$	○ (∀n ∈ ℕ): $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$																																																										
○ (∀x ∈ ℝ): x² + x + 1 ≥ 0	○ (∃x ∈ ℝ): x² + x + 1 < 0																																																										
○ (∀n ∈ ℕ) (∃m ∈ ℕ) : m ≥ n	○ (∃n ∈ ℕ) (∀m ∈ ℕ) : m < n																																																										
Evaluation		Durée : 20 min																																																									

Application :

Compléter le tableau suivant :

La proposition P	La négation $\bar{P}$
• $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2 + 2x + 1 \geq 0$	•
• $(\forall x \in \mathbb{N}) : x^2 - 2x < 0$	•
• $(\forall x \in \mathbb{Q}) : \sqrt{x} \notin \mathbb{Q}$	•
• $(\exists x \in \mathbb{R}) : x \in \mathbb{Q}$	•
• $(\exists x \in \mathbb{N}) : x$ est pair	•
• $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N}) : x < y$	•
• $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z}) : x - y = 3$	•
• $(\forall x \in \mathbb{Q})(\forall y \in \mathbb{Z}) : x \times y \in \mathbb{Z}$	•

2. La disjonction

Développement

Durée :30 min

Définition :

La disjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie si au moins l’une des deux propositions est vraie on la note **P ou Q** ou **$P \vee Q$** .

Tableau de vérité de **P ou Q** :

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple :

- La proposition : $(- 5 \geq 2)$ ou $(5 \geq 2)$ est vraie.
- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ ou $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(- 5 \in \mathbb{R})$ ou $(3$ divise $12)$ est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$ ou $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

3. La conjonction

Développement

Définition :

La conjonction de deux propositions P et Q est la proposition qui est vraie uniquement si les deux propositions P et Q sont vraies en même temps on la note : **P et Q** ou **$P \wedge Q$** .

Tableau de vérité de **$(P$ et $Q)$** :

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple

- La proposition : $(- 5 \geq 2)$ et $(5 \geq 2)$ est fausse.
- La proposition : $(3 + 2 = 6)$ et $(-3 \geq 1)$ est fausse.
- La proposition : $(- 5 \in \mathbb{R})$ et $(3$ divise $12)$ est vraie.
- La proposition : $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 = -1$ et $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ est fausse.

Evaluation																
Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes : • P_1 : (3 est impair) et (3 = 5). • P_2 : (4 × 8 = 20) ou (10 est pair). • P_3 : (9 − 3 = 6) et (−1 ∈ ℤ). • P_4 : (−4 ∈ ℕ) ou (∀x ∈ ℝ: $x^2 + 1 > 0$).																
Développement																
Remarque (lois de Morgane) Soient P et Q deux propositions. ▪ La négation de (P et Q) est ($\bar{P}$ ou $\bar{Q}$). ▪ La négation de (P ou Q) est ($\bar{P}$ et $\bar{Q}$). Exemples : ○ La négation de « (0 ≥ 2) et (1 + 5 = 3) » est : « (0 < 2) ou (1 + 5 ≠ 3) ». ○ La négation de « (5 ∈ ℕ) ou (∀x ∈ ℝ: $x^2 > 0$) » est : « (5 ∉ ℕ) et (∃x ∈ ℝ : $x^2 \leq 0$) ».	Durée : 40 min															
Evaluation																
Application : Nier les deux propositions suivantes : 1. P: "(∀x ∈ ℝ)(∃y ∈ ℝ): $x \leq y$ ou $x \geq y$ ". 2. Q: "(∃x ∈ ℝ)(∀y ∈ ℝ): $y^2 = x$ et $x > 0$ ".	Durée : 30 min															
4. L'implication																
Développement																
Définition : L'implication de deux propositions P et Q est la proposition qui est fausse seulement dans le cas P est vraie et Q est fausse. On la note par $P \Rightarrow Q$ et se lit : P implique Q. Tableau de vérité de $P \Rightarrow Q$: <table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P \Rightarrow Q$</th></tr><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr></table> Exemples : ○ La proposition $2 > 1 \Rightarrow 2 + 3 = -1$ est fausse. ○ La proposition $3 \times 2 = 9 \Rightarrow 5 - 1 = 20$ est vraie. ○ La proposition $(3^2 = 9) \Rightarrow 4 - 1 = 3$ est vraie. ○ La proposition $2 < 0 \Rightarrow 2 + 3 = 5$ est vraie. Remarques $P \Rightarrow Q$ Signifie si P est vraie, alors Q est vraie. L'implication $Q \Rightarrow P$ est appelée l'implication réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$. Pour montrer que $P \Rightarrow Q$ est vrai, on suppose que P est vraie, et on montre que Q est vraie. Les propositions $P \Rightarrow Q$ et ($\bar{P}$ ou Q) ont la même valeur de vérité. Exemples : ○ " $x = 2 \Rightarrow x^2=4$ " signifie : "si $x = 2$, alors $x^2 = 4$ " et c'est une proposition vraie. ○ " $x^2=4 \Rightarrow x = 2$ " est l'implication réciproque de " $x = 2 \Rightarrow x^2=4$ " et c'est une	P	Q	$P \Rightarrow Q$	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	F	V	Durée : 40 min
P	Q	$P \Rightarrow Q$														
V	V	V														
V	F	F														
F	V	V														
F	F	V														

<i>proposition fausse.</i> ○ Soit x un réel, Montrons que : $x \leq 3 \Rightarrow 2x - 4 \leq 10$ On a : $x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$ $\Rightarrow -6 \leq 2x \leq 6$ $\Rightarrow -10 \leq 2x - 4 \leq 2$ $\Rightarrow -10 \leq 2x - 4 \leq 10$ $\Rightarrow 2x - 4 \leq 10.$ Donc : $x \leq 3 \Rightarrow 2x - 4 \leq 10.$	
---	--

Evaluation	Durée : 30 min
-------------------	-----------------------

<u>Application :</u> 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que n pair $\Rightarrow n^2$ pair. 2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+): \left(\frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 - \sqrt{x} \Rightarrow x = 0\right).$ <u>Exercice 1 :</u> Soient x et y de $\mathbb{R}$. Montrer que $1 + xy = x + y \Rightarrow x = 1$ ou $y = 1$. <u>Exercice 2 :</u> 1. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}): 3 \leq x \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2}.$ 2. a. Montrer que $(\forall a \in \mathbb{R}) (\forall b \in \mathbb{R}): a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0.$ b. En déduire $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+): x + y + 2 = 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \Rightarrow x = y = 1.$	
--	--

5. L'équivalence

Développement	Durée : min
----------------------	--------------------

Définition :

L'équivalence de deux propositions P et Q est la proposition ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$) qu'on note par $P \Leftrightarrow Q$ et se lit « P est équivalente à Q » ou bien « P si et seulement si Q ».

$P \Leftrightarrow Q$ est vraie seulement si P et Q ont même valeur de vérité.

Tableau de vérité de $P \Leftrightarrow Q$:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple :

Soient a et b deux nombres réels

Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Inversement, si $a = 0$ ou $b = 0$, alors $ab = 0$.

Donc on a l'équivalence suivant $ab = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

Evaluation	Durée : 25 min
-------------------	-----------------------

<u>Application :</u> Déterminer la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes : • $P_1 : 3$ est impair $\Leftrightarrow 3 = 5$. • $P_2 : 4 \times 8 = 20 \Leftrightarrow 10$ est pair. • $P_3 : -1 \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 9 - 3 = 6$. • $P_4 : -4 \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}): x^2 + 1 > 0$.	
--	--

IV. Lois logiques

Développement	Durée : min																														
Définition : Une loi logique est une proposition qui est vraie quel que soit la vérité des propositions que la constitue. Exemple : P et Q sont deux propositions. Montrons que $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$ est une loi logique. <table><tr><th>P</th><th>Q</th><th>$P \Leftrightarrow Q$</th><th>$\neg(P \Leftrightarrow Q)$</th><th>$\neg P \Leftrightarrow Q$</th><th>$\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$</th></tr><tr><td>V</td><td>V</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr><tr><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td><td>V</td></tr></table> La proposition $\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$ est toujours vraie quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q. Donc elle est une loi logique.	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg(P \Leftrightarrow Q)$	$\neg P \Leftrightarrow Q$	$\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$	V	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	V	F	V	F	V	V	V	F	F	V	F	F	V	
P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$\neg(P \Leftrightarrow Q)$	$\neg P \Leftrightarrow Q$	$\neg(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$																										
V	V	V	F	F	V																										
V	F	F	V	V	V																										
F	V	F	V	V	V																										
F	F	V	F	F	V																										
Evaluation	Durée : min																														
Application : Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques : $P \Leftrightarrow \neg(\neg P)$ $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ $[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$ $\neg(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow P \text{ et } \neg Q$ $[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \Leftrightarrow [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$ $[(P \Rightarrow Q) \text{ et } (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$																															
V. Raisonnements mathématiques 1. Raisonnement par contre-exemple :																															
Développement																															
Propriété : Pour prouver que la proposition "$(\forall x \in E): P(x)$" est fausse, il suffit de prouver que la proposition $(\exists x \in E): \overline{P(x)}$ est vraie. Exemple : Montrons que "$(\forall x \in \mathbb{R}): 2x - 1 = 0$" est fausse. Il suffit de montrer que "$(\exists x \in \mathbb{R}): 2x - 1 \neq 0$" est vraie. On a pour $x = 0 : 2 \times 0 - 1 \neq 0$ Alors "$(\exists x \in \mathbb{R}): 2x - 1 \neq 0$" est vraie. Par suite "$(\forall x \in \mathbb{R}): 2x - 1 = 0$" est fausse.																															
Evaluation																															
Application : Montrer que les propositions suivantes sont fausses : $P_1 : "$ $(\forall x \in \mathbb{R}): x + 1 = 2$". $P_2 : "$ $(\forall x \in \mathbb{R}^*): x + \frac{1}{x} \geq 2$". $P_3 : (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+): \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.																															

Lycée Collégial Complexe Pédagogique Aghbalou	Notions de logique mathématique	Professeur : Mustapha LAGUSIBY Année Scolaire :2023/2024
--	------------------------------------	---

1^{ère} année du baccalauréat

2. Raisonnement par la contraposée :

Développement

Propriété :

Pour démontrer l'implication $P \Rightarrow Q$, on peut essayer de démontrer la contraposée $\neg Q \Rightarrow \neg P$ qui est parfois plus simple.

Exemple :

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+): x \neq y \Rightarrow x^3 + 4x \neq y^3 + 4y$.

Essayons de montrer $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+): x^3 + 4x = y^3 + 4y \Rightarrow x = y$.

On a $x^3 + 4x = y^3 + 4y \Rightarrow x^3 - y^3 + 4x - 4y = 0$

$$\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2) + 4(x - y) = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x - y = 0 \text{ car } x^2 + xy + y^2 + 4 \neq 0 \text{ du fait que } x \in \mathbb{R}^+ \text{ et } y \in \mathbb{R}^+.$$

$$\Rightarrow x = y.$$

Evaluation

Application :

1. Montrer que : $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}) : a + b > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{2} \text{ ou } b > \frac{1}{2}$.

2. Montrer que : $(\forall x > 1)(\forall y > 1): x \neq y \Rightarrow \frac{x}{1+x^2} \neq \frac{y}{1+y^2}$.

3. Raisonnement par les équivalences successives :

Développement

Propriété :

Soient P, R et Q trois propositions.

Le raisonnement par les équivalences successives se basé sur la loi logique suivant :

$$[(P \Leftrightarrow R) \text{ et } (R \Leftrightarrow Q)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q)$$

Exemple :

Montrons que $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}): a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a = b$

On a : $a^2 + b^2 = 2ab \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a - b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b.$$

Evaluation

Application :

1. Montrer que : $(\forall x \neq -1)(\forall y \neq -1): \frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y} \Leftrightarrow x = y$.

2. Montrer, pour tout x de $\mathbb{R}^+$, que $(\sqrt{2x+2} = 1 + \sqrt{x}) \Leftrightarrow (x = 1)$.

3. Montrer, pour tout x de $[1; +\infty[$, que $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$.

Exercice :

1. Soit x un réel. Montrer que : $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ou } x = -\sqrt{3}$.

2. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R} : |x - 1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$.

3. Soient $a \in [1; +\infty[$ et $b \in [4; +\infty[$. Montrer que

$$\sqrt{a-1} + 2\sqrt{b-4} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = 2 \text{ et } b = 8.$$

4. Raisonnement par disjonction des cas :

Développement

Lycée Collégial Complexe Pédagogique Aghbalou	Notions de logique mathématique	Professeur : Mustapha LAGUSIBY Année Scolaire :2023/2024
--	------------------------------------	---

1^{ère} année du baccalauréat

Propriété : Soient P, R et Q trois propositions. Pour montrer que $[(P \text{ ou } Q) \Rightarrow R]$ on montre parfois $[P \Rightarrow R \text{ et } Q \Rightarrow R]$. Exemple : Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{1+x^2} + x > 0$. - Si $x \geq 0$, alors $\sqrt{1+x^2} + x > 0$ du fait que $\sqrt{1+x^2} > 0$. - Supposons que $x < 0$. On a $1+x^2 > x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$ $\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > x$ $\Rightarrow \sqrt{1+x^2} > -x$ $\Rightarrow \sqrt{1+x^2} + x > 0.$ Donc dans tous les cas de x, $\sqrt{1+x^2} + x > 0$. Par suite $(\forall x \in \mathbb{R}) : \sqrt{1+x^2} + x > 0$.		
Evaluation		
Application : Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $n^2 + n$ est pair. Exercice : Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) : x-1 \leq x^2 - x + 1$.		
5. Raisonnement par absurde :		
Développement		
Propriété : Soient P et Q deux propositions. Le raisonnement par absurde est basé sur la loi logique $[\bar{P} \Rightarrow (Q \text{ et } \bar{Q})] \Rightarrow P$. Exemple : Soit n un entier naturel tel que n^2 est pair. Montrons que n est pair : Supposons n est impair, alors $(\exists k \in \mathbb{N}) : n = 2k + 1$. Donc $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair, ce qui est contredit le fait que n^2 est pair. D'où d'après le principe du raisonnement par l'absurde, n est pair.		
Evaluation		
Application : Soient x, y et z de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $x + y + z < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ et $xyz > 1$. Montrer que $x \neq 1, y \neq 1$ et $z \neq 1$.		
6. Raisonnement par récurrence		
Développement		
Propriété : Le principe de récurrence permet de montrer qu'une fonction propositionnelle $P(n)$ vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : Initialisation : On prouve que $P(n)$ est vraie pour $n = n_0$. Hérédité : On prend $n \geq n_0$ donné on suppose que $P(n)$ est vraie, et on démontre que $P(n+1)$ est vraie. Conclusion : On conclut que, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie. Exemple : Montrons que 3 divise $4^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$, $4^0 - 1 = 0$ et 3 divise 0. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que 3 divise $4^n - 1$.		

Lycée Collégial Complexe Pédagogique Aghbalou	Notions de logique mathématique	Professeur : Mustapha LAGUSIBY Année Scolaire :2023/2024
--	------------------------------------	---

1^{ère} année du baccalauréat

Montrons que 3 divise $4^{n+1} - 1$: $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 3 \times 4^n + 4^n - 1$. D'après l'hypothèse de la récurrence, il existe un entier naturel k tel que $4^n - 1 = 3k$. Donc $4^{n+1} - 1 = 3 \times 4^n + 3k = 3(4^n + k) = 3k'$ et $k' \in \mathbb{N}$. Ce qui entraîne que 3 divise $4^{n+1} - 1$. D'où d'après le principe de récurrence on conclut que 3 divise $4^n - 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).	
Evaluation	
<u>Application :</u> 1. Montrer que ($\forall n \in \mathbb{N}$) : $2/5^n - 3^n$ 2. Montrer que ($\forall n \in \mathbb{N}$) : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Montrer que ($\forall n \in \mathbb{N}$): $1+2+2^2+\dots+2^n = 2^{n+1} - 1$.	