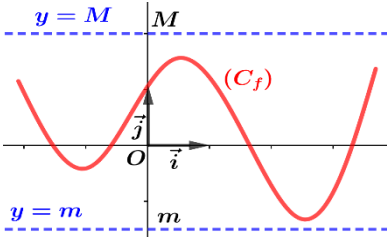
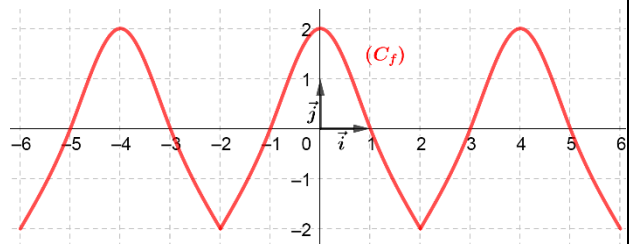
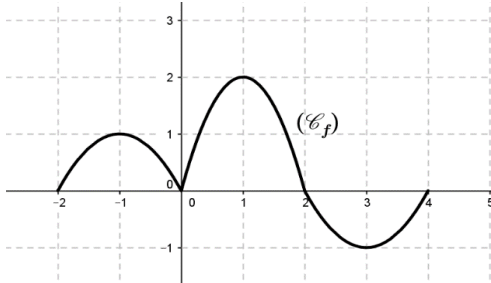
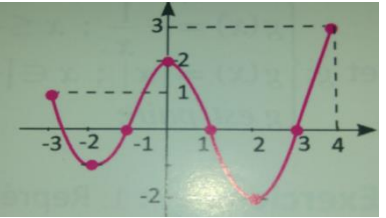
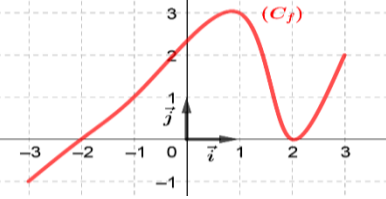


Etapas	contenu	Durée
Activité d'initiation	<u>I. Généralités</u> <u>Activité 1</u> Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \frac{2x^2+3}{x^2+1}$. 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f 2) Montrer que $(\forall x \in D_f); f(x) \leq 3$ 3) Montrer que $(\forall x \in D_f); f(x) \geq 2$ 4) Dédire que $(\forall x \in D_f); 2 \leq f(x) \leq 3$	
Résumer du cours	<u>1. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée</u>  Définitions Soit f une fonction définie un intervalle I ($I \subset \mathbb{R}$). On dit que : * f est majorée sur I s'il existe un nombre réel M tel que $(\forall x \in I); f(x) \leq M$ * f est minorée sur I s'il existe un nombre réel m tel que $(\forall x \in I); f(x) \geq m$ * f est bornée sur I s'elle est majorée et minorée sur I $((\forall x \in I); m \leq f(x) \leq M)$. <u>Exemple</u> On considère La fonction $f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x}$. ○ f Est majorée sur $]0; +\infty[$ par 1. En effet $(\forall x \in]0; +\infty[); f(x) - 1 = -\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x} < 0$ pour tout $x \in]0; +\infty[$. ○ f Est minorée sur $]-\infty; 0[$ par 1. En effet $(\forall x \in]-\infty; 0[); f(x) - 1 = -\frac{1}{x}$ et $-\frac{1}{x} > 0$ pour tout $x \in]-\infty; 0[$. <u>Remarque :</u> *Si f est majorée par M sur I alors (C_f) est au-dessous de la droite d'équation $y = M$ sur I. *Si f est minorée par m sur I alors (C_f) est au-dessus de la droite d'équation $y = m$ sur I. 	
Evaluation	<u>Application :</u> On considère f et g les fonctions définies respectivement par $f(x) = 3 - \sqrt{1 - 2x}$ et $g(x) = \sqrt{x^2 + 4}$. 1) Déterminer D_f et D_g. 2) a) Montrer que f est majorée par 3 sur D_f. b) Interpréter les résultats géométriquement. 3) a) Montrer que g est minorée par 2 sur D_g. b) Interpréter les résultats géométriquement.	

Résumer du cours	Propriété : Soit f une fonction définie un intervalle I ($I \subset \mathbb{R}$). f est dite bornée sur I ; si $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(x) \leq k$	
Evaluation	Application : Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) + \cos(x)$. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) \leq 3$	
Résumer du cours	2. Extremums d'une fonction numérique  Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I. On dit que : $f(a)$ est la valeur minimale (ou le minimum) de f sur I si $(\forall x \in I): f(x) \geq f(a)$. $f(a)$ est la valeur maximale (ou le maximum) de f sur I si $(\forall x \in I): f(x) \leq f(a)$. $f(a)$ est un extremum de f sur I s'il est le maximum ou le minimum de f sur I. Exemple : -3 est La valeur minimale de la fonction $f: x \mapsto x^2 - 4x + 1$ sur $\mathbb{R}$. En effet : $(\forall x \in \mathbb{R}): f(x) - (-3) = (x - 2)^2 \geq 0$ et $f(2) = -3$.	
Evaluation	Exercice 2 de la série:	
Activité d'initiation	II. Fonctions périodiques Activité 1 La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$. 1. Vérifier que $f(-2) = f(2)$, $f(0) = f(4)$ et $f(1) = f(5)$. 2. Soit $x \in \mathbb{R}$, déterminer la relation entre $f(x + 4)$ et $f(x)$. 	
Résumer du cours	 Définitions : Soit f une fonction définie sur D et T un nombre réel strictement positif. On dit que f est périodique (ou T-périodique) sur D si : $x + T \in D$ pour tout x de D. $f(x + T) = f(x)$ pour tout x de D. Exemples : - Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \cos(x)$ sont périodiques de période 2π. - La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est périodique de période π.	
Evaluation	 Application : On considère les fonctions f et g définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos^2(x)$ et $g(x) = \sin(2\pi x)$. Montrer que les fonctions f et g sont périodiques de périodes respectives π et 1.	

Résumer du cours	III. <u>Comparaison de deux fonctions</u> 1) <u>Egalité de deux fonctions</u> ✎ Définitions : Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble D. On dit que : f et g sont égales sur D si et seulement si, $(\forall x \in D) : f(x) = g(x)$. f est supérieure ou égale à g sur D si et seulement si, $(\forall x \in D) : f(x) \geq g(x)$ et on écrit $f \geq g$. Exemples : Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x^2+2}$ et $g(x) = x + 1$. On a $(\forall x \in \mathbb{R}^*) : f(x) - g(x) = \frac{1}{x^2+2} > 0$. Donc $f > g$ sur $\mathbb{R}^*$. 2) <u>Interprétation graphique :</u> Soient f et g deux fonctions et D un ensemble inclus dans $D_f \cap D_g$. ✓ Si $f > g$ sur D, alors (C_f) est strictement au-dessus de (C_g) sur D. ✓ Si $f \leq g$ sur D, alors (C_f) est au-dessous de (C_g) sur D. ✓ Si $f \leq 0$ alors (C_f) est au-dessous d'axe des abscisses sur I. ✓ Si $f \geq 0$ alors (C_f) est au-dessus d'axe des abscisses sur I.
Evaluation	✎ Application ③ : On considère f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x^2 + 4x + 1$. - Etudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$. - En déduire une comparaison entre f et g sur $\mathbb{R}$. Exercice ④ de la série :
Résumer du cours	IV. <u>Image d'un intervalle par une fonction numérique</u> ✎ Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. L'ensemble des valeurs de $f(x)$ tels que $x \in I$ est appelé image de l'intervalle I par la fonction f et on le note par $f(I)$. Autrement dit : $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$. Technique : Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a ; b]$. ✓ Si f est croissante sur $[a ; b]$, alors : $f([a ; b]) = [f(a) ; f(b)]$. ✓ Si f est décroissante sur $[a ; b]$, alors : $f([a ; b]) = [f(b) ; f(a)]$. ✓ Si f change de monotonie sur $[a ; b]$, alors : $f([a ; b]) = [m ; M]$ avec m la valeur minimale et M la valeur maximale de f sur $[a ; b]$. Exemple : La figure ci-contre représente la courbe représentative d'une fonction f définie sur $[-2 ; 4]$. Lorsque x varie sur l'intervalle $[-2 ; -1]$, $f(x)$ varie sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Donc : $f([-2 ; -1]) = [0 ; 1]$. De même, on a : ○ $f([0 ; 1]) = [0 ; 2]$ ○ $f([1 ; 3]) = [-1 ; 2]$ ○ $f([1 ; 4]) = [-1 ; 2]$ ○ $f([0 ; 3]) =]-1 ; 2]$ ○ $f([-1 ; 1]) = [0 ; 2[$ ○ $f([-2 ; 4]) = [-1 ; 2]$ 

Evaluation	Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I = [-3; 4]$ dont la courbe ci-dessous 1) Dresser le tableau de variations de f sur I 2) Déterminer les extremums de la fonction , puis le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ 3) Déterminer graphiquement : $f([-2; 0])$, $f([-3; -2])$, $f(]0; 2[)$ et $f([3; 4])$. Exercice 4 de la série :	
Activité d'initiation	V. Monotonie une fonction numérique Activité : On considère f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. 1. Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f. 2. Etudier la parité de f puis interpréter graphiquement le résultat. 3. Montrer que pour tous a et b dans $[0; +\infty[$; on a $T = -\frac{a+b}{(a^2+1)(b^2+1)}$ 4. Etudier la monotonie de f sur $[0; +\infty[$ puis sa monotonie sur $]-\infty; 0]$. 5. Etudier la monotonie des fonctions $3f$, $-2f$ et $f + 3$ sur $[0; +\infty[$.	
Résumer du cours	Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et λ un nombre réel. - Les deux fonctions f et $f + k$ ont le même sens de variations sur I. - Si $\lambda > 0$, alors f et λf ont le même sens de variations sur I. - Si $\lambda < 0$, alors f et λf ont des sens de variations contraires sur I.	
Evaluation	Application 4 : Soit f une fonction définie sur $[-3; 3]$ par sa courbe ci-contre . Donner le tableau de variations des fonctions f, $f + 2$ et $-3f$.	
Activité d'initiation	VI. Composée de deux fonctions numériques Activité : On considère f et g deux fonctions définies par $f(x) = -x + 5$ et $g(x) = \sqrt{x}$. 1. a. Calculer $f(1)$ puis $g(f(1))$. b. Calculer $f(-4)$ puis $g(f(-4))$. c. Calculer $f(8)$. Peut-on calculer puis $g(f(8))$. 2. a. Déterminer l'intervalle I tel que $g(f(x))$ est calculable pour tout x de I. b. Déterminer l'expression de $g(f(x))$ pour tout x de I.	
Résumer du cours	Définitions : g est une fonction définie sur un intervalle J et f est une fonction définie sur un intervalle I telle que, pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$. La fonction composée de f et g dans cet ordre, noté $g \circ f$, est la fonction définie pour tout $x \in I$ par : $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Remarques : $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$. - En général, $g \circ f \neq f \circ g$. Exemple Soient $f: x \mapsto x^2$, définie sur $D_f = \mathbb{R}$, et $g: x \mapsto \frac{2x}{x-4}$, définie sur $D_g = \mathbb{R} \setminus \{4\}$. - Domaine de définition de la fonction composée $g \circ f$:	

	On a $x \in D_{g \circ f} \Leftrightarrow x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g$ $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x^2 \neq 4$ $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \text{ et } x \neq -2 \text{ et } x \neq 2.$ Donc $D_{g \circ f} =]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[.$ Expression de la fonction composée $g \circ f$: On a $\forall x \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[: (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \frac{2x^2}{x^2-4}.$	
Evaluation	 Application - Soient f et g deux fonctions numériques définies par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = \frac{2x+3}{3x-6}$. - Déterminer D_f, D_g et $D_{g \circ f}$. - Donner l'expression de la fonction $g \circ f$. - Ecrire la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par $h(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+5}.$	
Résumer du cours	 Propriété : Soient f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur les intervalles I et J tels que $f(I) \subset J$. - Si f et g ont même sens de variations, respectivement sur I et J, alors la fonction composée $g \circ f$ est croissante sur I. - Si f et g ont des sens de variations contraires, respectivement sur I et J, alors la fonction composée $g \circ f$ est décroissante sur I. Exemple : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$ h est la fonction de composée de $f: x \mapsto x^2$ et $g: x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$ ($h = g \circ f$). - On a f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et $f(]-\infty; 0]) = [0; +\infty[.$ Et puisque g est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors h est croissante sur $]-\infty; 0]$. - On a f est croissante sur $[0; +\infty[$ et $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[.$ Et puisque g est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors h est décroissante sur $[0; +\infty[.$	
Evaluation	Application : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 1$ et $g(x) = -2x + 1$. - Dresser les tableaux de variations de f et g. - Déterminer $f(]-\infty; 1])$ et $f([1; +\infty[)$. - Etudier les variations de la fonction $g \circ f$ sur $]-\infty; 1]$ et $[1; +\infty[.$  Exercice 5 de la série :	
	VII. Représentation graphique des fonctions $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto ax^3$ 1. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^3$: Soient a un nombre réel non nul et $f: x \mapsto ax^3$. On a $(\forall x \in \mathbb{R}) : -x \in \mathbb{R} \text{ et } f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x).$ Ce qui entraîne que f est impaire, donc qu'il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+.$ Soient x et y deux éléments de $[0; +\infty[$ tels que $x < y$ ➤ Si $a > 0$: On a : $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$ (car x et y sont positifs) $\Rightarrow ax^3 < ay^3$ (car $a > 0$) $\Rightarrow f(x) < f(y).$ Donc f est croissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu'elle est impaire, alors elle croissante sur $]-\infty; 0]$. D'où f est croissante sur $\mathbb{R}.$	

➤ Si $a < 0$:

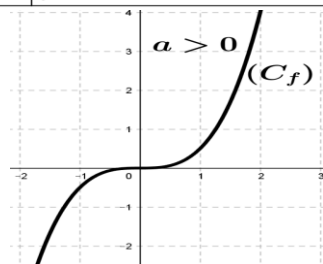
$$\begin{aligned} \text{On a : } x < y &\Rightarrow x^3 < y^3 \\ &\Rightarrow ax^3 > ay^3 \text{ (car } a < 0) \\ &\Rightarrow f(x) > f(y). \end{aligned}$$

Donc f est décroissante sur $[0; +\infty[$, et puisqu' elle est impaire, alors elle décroissante sur $] -\infty; 0]$.

D'où f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

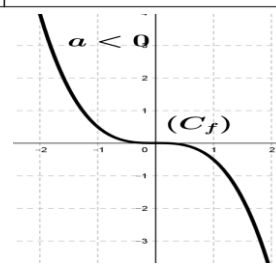
❖ $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			



❖ $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			



2. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$:

Soient a un nombre réel non nul et $f: x \mapsto \sqrt{x+a}$.

On a $D_f = [-a; +\infty[$.

Soient x et y deux éléments de $D_f = [-a; +\infty[$ tels que $x < y$.

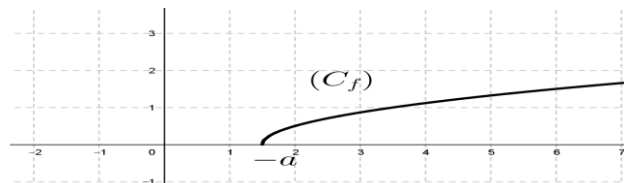
$$\begin{aligned} \text{On a : } x < y &\Rightarrow x + a < y + a \\ &\Rightarrow \sqrt{x+a} < \sqrt{y+a} \\ &\Rightarrow f(x) < f(y). \end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur $[-a; +\infty[$.

❖ Tableau de variations

x	$-a$	0	$+\infty$
$f(x)$			

❖ Représentation graphique



Application ② :

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = -x^3$ et soient (C_f) et (C_g) les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Etudier les variations de f et g .
2. Construire (C_f) et (C_g) .
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x+3} + x^3 < 0$ sur $[-2; +\infty[$.

✍ Exercice @ de la série .