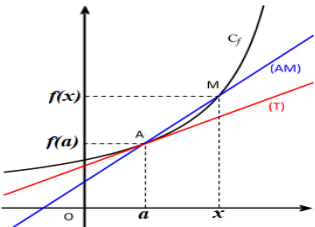


<i>Prof : LAGUSIBY Mustapha</i>	<i>Durée : 10 heures</i>	<i>Dérivabilité d'une fonction</i>	<i>Niveau : 1B.S.E.F</i>
Les capacités attendues	✓		
Contenus du programme			
Recommandations pédagogiques			
Fichiers utilisés dans la préparation du cours			
Rôle de l'enseignant			
Rôle de l'apprenant			

Etapas	contenu	Durée			
Résumer du cours	I. <u>Dérivabilité en un point</u> 1. <u>Nombre dérivé</u> <u>Définition</u> Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et a un point de I. On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel l tel que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = l \in \mathbb{R}$. Le nombre l s'appelle le nombre dérivé de la fonction f en a et se note $f'(a)$ et on écrit : $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ <u>Exemple :</u> Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = x^2 + 2x$ Montrer que la fonction f est dérivable en $a = 1$ puis déduire le nombre dérivé en 1 ✧ Calculons la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ On a $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = 4$ Donc la fonction f est dérivable en 1 et le nombre dérivé en 1 est 4, et on écrit $f'(1) = 4$ <u>Remarque :</u> Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en a.				
Evaluation	<u>Application ④ :</u> Etudier la dérivabilité de f en a dans les cas suivants : <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(x) = 3x + 1 \quad ; a = 1$</td> <td style="padding: 5px;">$f(x) = \frac{x^2-2x}{x+1} ; \quad a = 0$</td> <td style="padding: 5px;">$f(x) = \sqrt{x-3} \quad ; a = 4$</td> </tr> </table>	$f(x) = 3x + 1 \quad ; a = 1$	$f(x) = \frac{x^2-2x}{x+1} ; \quad a = 0$	$f(x) = \sqrt{x-3} \quad ; a = 4$	
$f(x) = 3x + 1 \quad ; a = 1$	$f(x) = \frac{x^2-2x}{x+1} ; \quad a = 0$	$f(x) = \sqrt{x-3} \quad ; a = 4$			
Résumer du cours	2. <u>Interprétation géométrique -Equation de la tangente</u> <u>Introduction</u> Soit f une fonction numérique, dérivable en a et soient $M(x, f(x))$ et $A(a, f(a))$ deux points de la courbe. Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\alpha = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Si le point M se rapproche du point A (x tend vers a), alors la droite (AM) confondue avec la droite (T) de coefficient directeur $f'(a)$ La droite (T) s'appelle la tangente de la courbe (C_f) en $A(a, f(a))$. L'équation de la droite (T) est comme suit : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. <u>Propriété</u> Soit f une fonction définie sur I et dérivable en a signifié géométriquement que la courbe C_f admet une tangente (T) en a d'équation : (T): $y = f'(a)(x - a) + f(a)$				

Exemple

Soit f une fonction définie par $f(x) = 2x - 3$

Montrons que f est dérivable en 2 puis interpréter les résultats géométriquement

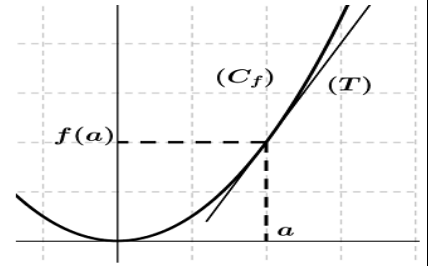
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 3 - (4 - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2\end{aligned}$$

Donc f est dérivable en 2.

Géométriquement :

La courbe de la fonction admet une tangente en un point $A(2, f(2))$ avec $f(2) = 1$

Donc l'équation de la tangente est : $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 2(x - 2) + 1 = 2x - 3$



Evaluation

Application ② :

Déterminer l'équation de la tangente de la fonction f en un point d'abscisse a dans les cas suivants :

a) $f(x) = 4x^2 - 5x + 3$; $a = 1$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x}$; $a = -1$

c) $f(x) = \sqrt{x+1} - 4$; $a = 3$

Résumer du cours

II. Dérivabilité à gauche et à droite

a) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un élément de I .

1. On dit que la fonction f est dérivable à droite en a s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Le réel l est appelé le nombre dérivé à droite de f en a , on le note : $f'_d(a)$

2. On dit que la fonction f est dérivable à gauche en a s'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Le réel l est appelé le nombre dérivé à gauche de f en a , on le note : $f'_g(a)$.

Exemple :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = |x^2 - 1|$

1. Étudier la dérivabilité de f à droite en 1.

2. Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

b) L'interprétation géométrique :

Si f est dérivable à droite en a alors (C_f) admet une **demi-tangente à droite** en $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$.

De même, si f est dérivable à gauche en a alors (C_f) admet une **demi-tangente à gauche** en $A(a; f(a))$ d'équation $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$

Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de a et $f'_d(a) = f'_g(a)$ et dans ce cas on écrit $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Interprétation géométrique

Propriété

- * Si f est dérivable à droite de a alors C_f admet une demi-tangente (T) à droite en a d'équation $(T): y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$
- * Si f est dérivable à gauche de a alors C_f admet une demi-tangente (T) à gauche en a d'équation $(T): y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$

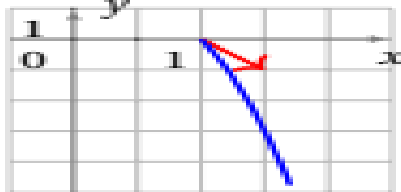
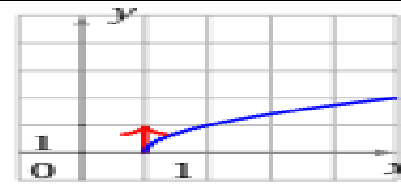
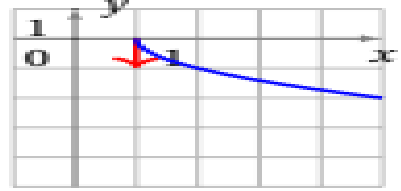
Application :

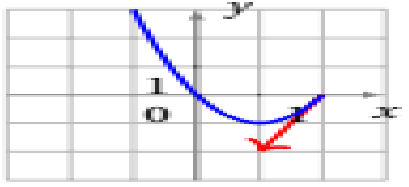
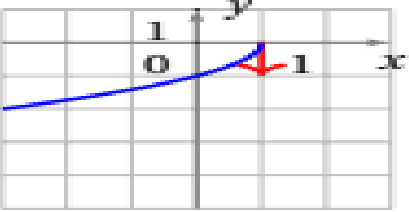
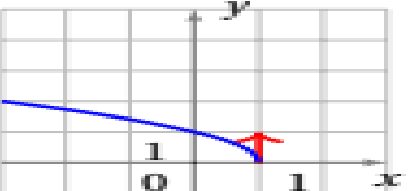
Soit f une fonction numérique définie par
$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 1 & ; x > -1 \\ f(x) = -x^2 + x + 2 & ; x \leq -1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la dérivabilité de la fonction f en -1
- 2) Interpréter les résultats graphiquement

Propriété :

Résumé : Interprétation géométrique de la dérivabilité à gauche et à droite d'un point a

Dérivabilité de f	Interprétation géométrique	
f Dérivable à droite de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$	(C_f) admet une demi tangente en point $A(x_0; f(x_0))$ d'équation $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	
f n'est pas dérivable à droite de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	(C_f) admet une demi tangente verticale dirige vers le haut en point $A(x_0; f(x_0))$	
f n'est pas dérivable à gauche de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	(C_f) admet une demi tangente verticale dirige vers le bas en point $A(x_0; f(x_0))$	

f Dérivable à gauche de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$	(C_f) admet une demi tangente en point $A(x_0; f(x_0))$ d'équation $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$	
f n'est pas dérivable à gauche de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$	(C_f) admet une demi tangente Verticale dirige vers le bas en point $A(x_0; f(x_0))$	
f n'est pas dérivable à gauche de x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	(C_f) admet une demi tangente Verticale dirige vers le haut en point $A(x_0; f(x_0))$	

Exemple :

Soit f une fonction définie par $f(x) = \sqrt{x}$

Etudions la dérivabilité de f à droite de 0

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite de 0 ; donc la courbe de la fonction f admet un demi-tangente d'équation $x = 0$ et dirigé vers le haut.

Evaluation

Application :

Soit f une fonction numérique définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Etudier la dérivabilité de la fonction f à droite de 2 ; puis interpréter les résultats.

Résumer du cours

III. Fonction dérivée

1. Dérivabilité sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I ouvert.

On dit que f est **dérivable sur I** s'elle est dérivable **en tout point** de l'intervalle I

Remarque :

- La fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$
- La fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle de son ensemble de définition.
- La fonction de la tangente est dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Exemples :

- $f(x) = x^3 - 5x^2 + 2$: est une fonction polynomiale alors est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$: est une fonction rationnelle alors est dérivable sur $\mathbb{R} - \{2\}$
- $f(x) = \sqrt{x}$: est dérivable sur $]0; +\infty[$.
- $f(x) = \cos(x)$: est dérivable sur $\mathbb{R}$
- $f(x) = \sin(x)$: est dérivable sur $\mathbb{R}$

2. Fonction dérivée d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction qui associe chaque nombre réel x de I par le réel $f'(x)$ s'appelle **fonction dérivée** de la fonction f sur I et se note f' ; et on écrit $f': I \rightarrow \square$
 $x \mapsto f'(x)$

Exemple :

On considère la fonction f qui est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} x + x_0 = 2x_0$

Donc f est dérivable en x_0 et le nombre dérivé est $f'(x_0) = 2x_0$ (l'image de x_0 par la fonction f')

Par conséquent f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 2x$

Evaluation

Application ④ :

Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3$

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 6x^2$

3. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	D_f	La dérivée f'	$D_{f'}$
$f: x \mapsto k ; (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto 0 ; (k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto x^n ; (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto nx^{n-1} ; (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f': x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f: x \mapsto 1/x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$	$f': x \mapsto -n/x^{n+1} (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$
$f: x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$f': x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f: x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$
$f: x \mapsto \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f': x \mapsto -\sin(x)$	$\mathbb{R}$

Résumer du cours

$f: x \mapsto \tan(x)$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$f': x \mapsto 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
------------------------	---	---	---

Exemple

$f(x) = x^5$ On a f une fonction polynôme donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (x^5)' = 5x^4$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$: on a f une fonction rationnelle donc est dérivable sur $D_f = \mathbb{R}^*$;

Donc $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{-2}{x^3}$

4. Opération sur les fonctions dérivées :

Propriété :

Si f et g deux fonctions dérivables sur un I alors la fonction :

- $f + g$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I); (f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- kf est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I); (k \times f)'(x) = k \times f'(x)$
- $f \times g$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I); (f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + g'(x) \times f(x)$
- $\frac{1}{f}$ est dérivable en tout point de I telle que $f(x) \neq 0$ et on a $(\forall x \in I); \left(\frac{1}{f}\right)'(x) = \frac{-f'(x)}{f^2(x)}$
- Si f est positive alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I); (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f}}$
- f^n est dérivable sur I et on a $(\forall x \in I); (f^n)'(x) = n \times f'(x) \times f^{n-1}(x)$ ($n \in \mathbb{N}^*$)
- $\frac{f}{g}$ est dérivable en tout point de I telle que $g(x) \neq 0$ et on a $(\forall x \in I); \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$

Application ⑤ :

Etudier la dérivabilité de la fonction f sur I et déterminer sa fonction dérivée f'

$$f(x) = (3x^2 + 2)\sqrt{x}; I = \mathbb{R}_+^* \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}; I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x^3 - 1)^6; I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}; I =]-1; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{2x^4}{(x+2)^2} \quad I = \mathbb{R} - \{2\}$$

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur I et soient a et b deux nombres réels.

Soit J l'ensemble des nombres réel x tel que $(ax + b) \in I$. La fonction $x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur J et on a $(\forall x \in J); (f(ax + b))' = af'(ax + b)$

Evaluation

Résumer du cours

Evaluation	Application @: Calculer $f'(x)$ dans les cas suivants : $\otimes f(x) = \sin(3x + 2)$; $\otimes f(x) = \tan(2x - 1)$; $\otimes f(x) = \cos(2x^2 - 4x + 1)$	
Résumer du cours	5. <u>Dérivées successives d'une fonction</u> Définition Soit f une fonction dérivable sur I. • Si f' est dérivable sur I alors sa dérivée s'appelle la dérivée seconde de la fonction f sur I et se note f'' • De même on peut définir la dérivée à l'ordre n ($n \geq 2$) et se note $f^{(n)}$ telle que : $(\forall x \in I); f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)})'$	
Evaluation n	Application @: Déterminer la dérivée seconde et la troisième dérivée de la fonction $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 5$	
	1. <u>Limites et ordre :</u> Propriété : Soit a et l deux réels et $I = [a; +\infty[$. Soit f, g et h des fonctions numériques définies sur I. • Si $\begin{cases} (\forall x \in I) g(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. • Si $\begin{cases} (\forall x \in I) g(x) \geq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ • Si $\begin{cases} (\forall x \in I); f(x) - l \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. • Si $\begin{cases} (\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. Remarque : Ces propriétés restent valables aussi quand x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a ou à droite en a ou à gauche en a.	
	Application @: 1. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$. b. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2 - \cos x}$ 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2$. Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad f(x) - 2 \leq x$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Exercice 9 de la série	