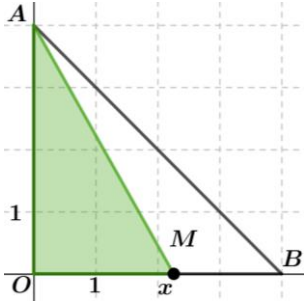


Prof : LAGUSIBY Mustapha	Durée : 10 heures	Limite d'une fonction	Niveau : 1B.S.E.F
Les capacités attendues	✓ Calculer les limites des fonctions polynômes, des fonctions rationnelles et des fonctions irrationnelles ; ✓ Calculer les limites des fonctions trigonométriques simples en utilisant les limites usuelles.		
Contenus du programme	-Limite des fonctions : $x \rightarrow x^2, x \rightarrow \sqrt{x}, x \rightarrow x^3, x \rightarrow x^n$ ainsi que leurs inverses en 0 , en $+\infty$ et en $-\infty$ -Limite finie et Limite infinie en un point ; -Limite finie et Limite infinie en $+\infty$ et $-\infty$. -Opérations sur les limites ; -Limite à gauche ; limite à droite ; -Limites de fonctions polynomiales ; rationnelles et limites de $\sqrt{f}$, f étant une fonction usuelle ; -Les limites: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$ -Limites et Ordre.		
Recommandations pédagogiques	✓ On approchera la notion de limite d'une manière intuitive à partir du « comportement » de fonctions de référence qui figurent au programme et leurs inverses au voisinage de 0 , de $+\infty$ et de $-\infty$, et on admettra ces limites ; -On se basera sur les propriétés de l'ordre dans IR pour calculer les limites de fonctions simples vérifiant : • $f(x) \sim u(x) - \leq$ où u est une fonction dont la limite est 0 ;		
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	✓ Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électroniques. ✓ Distribution périodique du programme de mathématiques		
Rôle de l'enseignant	Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations		
Rôle de l'apprenant	Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions. • Formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème, une propriété... + Répondre aux exercices		

Etapes	contenu	Durée
Activité d'initiation	1. Limite finie et infinie d'une fonction en un point : 1. Limite finie d'une fonction en un point : <u>Activité</u> Dans la figure ci-contre OAB est un triangle de surface 8cm^2 et M un point mobile d'abscisse x sur le segment $[OB]$. On considère $f(x)$ la surface du triangle OAM.  - On remarque que $f(x)$ prend des valeurs proches de plus en plus de 8 lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 4. On dit que $f(x)$ tend vers 8 lorsque x tend vers 4 et on écrit $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8$. - On remarque que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0. Donc la limite de f en 0 est 0 et on écrit $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. - On a $f(x) = 2x$, on trouve alors $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} 2x = 2 \times 4 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 2 \times 0 = 0 \end{cases}$	
Résumer du cours	 Définition : Soit a et l deux nombres réels. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a - x_0; a + x_0[$ ou sur un ensemble de la forme $]a - x_0; a + x_0[- \{a\}$ où $(\alpha \in \mathbb{R}^{**})$. Si $f(x)$ tend vers l quand x tend vers a, on écrit: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.  Propriété : Soit f une fonction numérique, a et l deux nombres réels. Si f admet une limite l en a alors cette limite est unique. Remarques : - On rencontre parfois lors de calcul de certaines limites en un point a la forme indéterminée suivante "$\frac{0}{0}$". - Les formes indéterminées sont "$\frac{0}{0}$", "$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$", "$+\infty - \infty$" et "$0 \times \pm\infty$". Exemple ① : Calculons $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$. On ne peut pas calculer cette limite directement parce que on obtient la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". On a $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+1}+2} = \frac{1}{\sqrt{4+1}+2} = \frac{1}{4}$. Exemple ② : Calculons $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2+3x+2}$. On ne peut pas calculer cette limite directement parce que on obtient la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$". La division euclidienne de $2x^3 + 2x^2 + x + 1$ et $x^2 + 3x - 2$ par $x + 1$, donne :	

$$2x^3 + 2x^2 + x + 1 = (x+1)(2x^2+1) \text{ et } x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2).$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2+3x+2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x^2+1)}{(x+1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2+1}{x+2} = \frac{2(-1)^2+1}{-1+2} = 3.$$

Application ① :

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+4}{x+5}$

❷ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

❸ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{x^2-4x}$

❹ $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

❺ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-3x+2}$

❻ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3-4x+1}{x^2-4x+3}$

❼ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2-5x+2}{\sqrt{x}-1}$

❽ $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{3-\sqrt{x+4}}$

Exercice ② de la série.

2. Limite infinie d'une fonction en un point :

Propriété :

Soit f une fonction numérique, a et l deux nombres réels.

- Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a , on écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{a} f(x) = +\infty$.
- Si $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers a , on écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{a} f(x) = -\infty$.

Limite à droite et à gauche d'une fonction en un point :

DEFINITION :

Soient f une fonction numérique et a un nombre réel.

- La limite de f à droite en a , notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, est la limite de f lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches et supérieures de a .
- La limite de f à gauche en a , notée $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$, est la limite de f lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches et inférieures de a .

Propriété :

On admet les limites suivantes :

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ • $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ • $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0$ • $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ • $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• Si n est pair, alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

• Si n est impair, alors $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^n} = -\infty$.

Exemple :

Calculons $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{3x-x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{3x-x^2}$.

Le tableau de signe de $3x - x^2$ est

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
$3x - x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Et on a $\lim_{x \rightarrow 3^+} x + 2 = 5$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} 3x - x^2 = 0^-$. Donc $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x^2-3x} = -\infty$.

Et on a $\lim_{x \rightarrow 3^-} 3x - x^2 = 0^+$. Donc $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{x^2-3x} = +\infty$.

Application ② :

Calculer les limites suivantes :

❶ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+3}{x-2}$

❷ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+3}{x-2}$

❸ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3-1}{x^2-x}$

❹ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2-x+5}{x-4}$

❺ $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x-2x^2}{x-x^3}$

❻ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{1-x^2}$

❼ $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{|x-1|}$

❽ $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3x^2-x-1}{1-2x}$

Evaluation

Activité d'initiation

Evaluation

Exercice ③ de la série.

Théorème :

Soit f une fonction numérique. On a : $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

Remarques :

- Le théorème reste valable si l est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l'$ tel que $l \neq l'$ on dit que f n'a pas de limite en a .

Exemple :

Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = -x + 1; & x \geq 3 \\ f(x) = x^2 - 4x + 1; & x < 3 \end{cases}$$

On $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} -x + 1 = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 4x + 1 = -2$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2$, alors f a une limite en a et on a : $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -2$.

Application :

- On considère la fonction f définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}; & x < 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}; & x > 1 \end{cases}$$

Calculer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Conclure.

- On considère la fonction g définie par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + 1}{-x + 3}; & x \leq 2 \\ g(x) = 1 - ax^2; & x > 2 \end{cases}$$

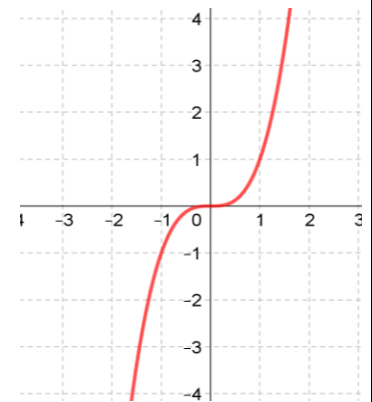
Déterminer une valeur de a pour laquelle g admet une limite en 2.

II. Limite finie et infinie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Activité ②:

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction $f: x \mapsto x^3$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
- Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus petites ?
- Exprimez vos remarques dans les questions 1. et 2. en utilisant les symbole $\lim$.



Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$, On admet les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n &= +\infty & \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n &= \begin{cases} +\infty; & n \text{ pair} \\ -\infty; & n \text{ impair} \end{cases} \\ \blacksquare \lim_{x \rightarrow +\infty} kx^n &= \begin{cases} +\infty; & k > 0 \\ -\infty; & k < 0 \end{cases} & \blacksquare \lim_{x \rightarrow -\infty} kx^n &= \begin{cases} +\infty; & k > 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ -\infty; & k < 0 \text{ et } n \text{ pair} \\ -\infty; & k > 0 \text{ et } n \text{ impair} \\ +\infty; & k < 0 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Activité ③:

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction $f: x \mapsto \frac{1}{x^2}$ dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
2. Que peut-on remarquer pour les valeurs de $f(x)$ quand x prend des valeurs de plus en plus petites ?
3. Exprimez vos remarques dans les questions 1. et 2. en utilisant les symboles $\lim$.



Propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{R}^*$, On admet les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^n} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{x^n} = 0$

Exemples :

Calculons les limites suivantes $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+5}{4x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3+x}{x^3}$.

Propriété :

Soient P et Q deux fonctions polynômes et a un réel.

Si ax^n et bx^m sont respectivement les termes du plus haut degré des polynômes P et Q , alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n ; \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{bx^m}$$

Application ④ :

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + 5x^2 + 8x$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} -5x^3 + 1$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + (1 - \sqrt{2})x^2 + 4$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + 2x^3}{3x^3 + 5x^2 + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2 - \sqrt{3})x^3 - x^2}{2x^2 - 3}$
- $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{|x| - 3x}{|x + 5|}$

Exercice ④ de la série

Exercice ① de la série.

Propriété :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ où $(a \in \mathbb{R})$ telle que $(\forall x \in [a; +\infty[): f(x) \geq 0$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ et $l \geq 0$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$.

Remarque :

- Cette propriété reste valable aussi quand x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a ou à droite en a ou à gauche en a .

Application ⑤ :

Calculer les limites suivantes :

- ① $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 2x + 5}$
- ② $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3x^2 - 5x + 1}$
- ③ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$

III. Opérations sur les limites

Dans tous ce qui suit, a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, l et l' sont des nombres réels. Ces résultats restent valables pour les limites à droite et à gauche en a .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$
l	$l' \neq 0$	$l + l'$	ll'	l/l'
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$F.I$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$F.I$
$+\infty$	$-\infty$	$F.I$	$-\infty$	$F.I$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I$	0
$+\infty$	0	$+\infty$	$F.I$	$\pm\infty$
0	0	0	0	$F.I$
$l \neq 0$	0	l	0	$\pm\infty$

Application @:

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x + 7 + \frac{1}{\sqrt{x}} & \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-3 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{2}{x}\right) & \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{4}{x^3}}{2 - x^5} \\ \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x - 3}}{x} & \textcircled{5} \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x + 3} - 2x + 1 & \textcircled{6} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x} + x \end{array}$$

IV. Limite de fonctions trigonométriques

Propriété :

$$\begin{array}{ll} \bullet \lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a) & \bullet \lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a) \\ \bullet \lim_{x \rightarrow a} \tan(x) = \tan(a) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Exemples :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \tan x = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \tan x = \sqrt{3}$$

Remarques :

- Les fonctions $x \mapsto \sin(x)$, $x \mapsto \cos(x)$ et $x \mapsto \tan(x)$ n'ont pas de limite en $\pm\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = -\infty$.

 Propriété :

Soit a un réel non nul, on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2} ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(ax)}{(ax)^2} = \frac{1}{2}.$$

Exemples :

$$\text{Calculons } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}.$$

Application @:

Exercice 8 de la série

Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 5x} & \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x} & \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x} & \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} \end{array}$$

$$5 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$$

6

$$6 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\tan \pi x}{x-1}$$

$$7 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$8 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

V. Limites et ordre :

Propriété :

Soit a et l deux réels et $I = [a; +\infty[$. Soit f, g et h des fonctions numériques définies sur I .

- Si $\begin{cases} (\forall x \in I) g(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I) g(x) \geq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I); |f(x) - l| \leq g(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.
- Si $\begin{cases} (\forall x \in I); g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l \end{cases}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

Remarque :

Ces propriétés restent valables aussi quand x tend vers $-\infty$ ou vers un réel a ou à droite en a ou à gauche en a .

Application @ :

1. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2 - \cos x} \leq 1$.

b. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \cos x}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2 - \cos x}$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + 2$.

Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad |f(x) - 2| \leq |x|$ puis déduire $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Exercice 9 de la série