

Étapes	contenu	Durée
Activité d'initiation	<u>I. Généralités sur les suites numériques</u>  Activité Q: - Compléter avec deux chiffres qui correspondent à la séquence de chacune des listes suivantes : 0, 3, 6, 9, ... 1, 2, 4, 8, ... Chacune des listes ci-dessus est appelée une suite numérique et les nombres qui la constituent sont appelés termes de cette suite. - Quelle est la relation que l'on adopte dans chaque liste pour passer d'un terme au terme suivant ?	
Résumer du cours	1) Définition et Notation : Soit p un entier naturel. On pose $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq p\}$.  Définitions : Tout fonction numérique u définie sur I est appelée suite numérique. - L'image par u d'un entier n de I est notée u_n. u_n Est appelé le terme général de la suite u. Remarques : - Une suite numérique u se note $(u_n)_{n \in I}$ ou $(u_n)_{n \geq p}$. - Si $I = \mathbb{N}$, u se note (u_n) ou $(u_n)_n$ ou $(u_n)_{n \geq 0}$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. - Si $I = \mathbb{N}^*$, u se note $(u_n)_{n \geq 1}$ ou $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. - Le réel u_p est le premier terme de la suite $(u_n)_{n \geq p}$. Exemples : - La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ telle que définie les multiples de 4. On a $u_0 = 0$, $u_1 = 4$ et $u_3 = 12$. 1, 10, 100 et 1000 sont des termes de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ telle que $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n = 10^n$. - La suite de terme général $w_n = \sqrt{n-3}$ est définie $n \geq 3$. On la note donc par $(w_n)_{n \geq 3}$ et son premier terme est $w_3 = \sqrt{3-3} = 0$.	
Evaluation	 Application : On considère la suite (u_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n = 2 + \frac{3}{n}$. - Calculer les trois premiers termes de (u_n). - Calculer $u_n + 1$, u_{n+1}, u_{2n} et u_{2n+1} pour tout n de $\mathbb{N}^*$. - Trouver l'indice n tel que $u_n = \frac{43}{21}$.	
Résumer du cours	Remarques : On distingue deux types de suites numériques : - Suite définie explicitement par son terme général. C'est une suite où le terme général est une fonction connue de l'entier n. - Suite récurrente. C'est une suite définie par son premier terme et par une relation qui permet de calculer un terme à partir d'un ou de plusieurs termes précédents. Exemple : On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies respectivement par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 1; n \in \mathbb{N} \end{cases}$, $\begin{cases} v_0 = 2, v_1 = -1 \\ v_{n+2} = \frac{2v_{n+1}}{v_n}; n \in \mathbb{N} \end{cases} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) : w_n = 2^n - \frac{4}{n}.$ Les suites (u_n) et (v_n) sont des suites récurrentes tandis que (w_n) est une Suite définie explicitement par son terme général.	
Evaluation	 Application :	

	On considère les suites (u_n) et (v_n) définies respectivement par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = 2, v_1 = -1 \\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n; n \in \mathbb{N} \end{cases}$. 1. Calculer u_1, u_2, v_3 et v_4. 2. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{2}{2n+1}$.	
<u>Activité d'initiation</u>	2) Suites majorée - suites minorées - suites bornées :  Activité 2: On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n+4}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 1. Montrer que $u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que la suite (u_n) est majorée par 4. 2. Montrer que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que la suite (u_n) est minorée par 1. 3. En déduire que $1 \leq u_n \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que la suite (u_n) est bornée.	
<u>Résumer du cours</u>	 Définitions : Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique . - On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est majorée si et seulement s'il existe un réel M tel que $(\forall n \in I): u_n \leq M$. - On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est minorée si et seulement s'il existe un réel m tel que $(\forall n \in I): U_n \geq m$. - On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est bornée si est à la fois majorée et minorée. Exemple : extrait de rat 2013 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que la suite (u_n) est minorée par 1.	
<u>Évaluation</u>	 Application : On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 3}{U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): U_n \geq 3$.	
<u>Résumer du cours</u>	 Propriété: $(u_n)_{n \in I}$ est une suite numérique. $(u_n)_{n \in I}$ est bornée si et seulement si $(\exists M \in \mathbb{R}_*^+); (\forall n \in I) : U_n \leq M$. Exemple : On considère la suite (u_n) définie par $U_n = 2 \cos(n^2 + 2) + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $(\forall n \in \mathbb{N}): U_n \leq 3$, alors (u_n) est bornée.	
<u>Résumer du cours</u>	3) Monotonie d'une suite numérique  Définitions : Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique . - On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est croissante si et seulement si $(\forall p; q \in I): p < q \Rightarrow u_p \leq u_q$. - On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante si et seulement si $(\forall p; q \in I): p < q \Rightarrow u_p \geq u_q$. - On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est constante si et seulement si $(\forall p; q \in I): p < q \Rightarrow u_p = u_q$.  Propriété: $(u_n)_{n \in I}$ est une suite numérique. $(u_n)_{n \in I}$ est croissante si et seulement si $(\forall n \in I): u_{n+1} \geq u_n$. $(u_n)_{n \in I}$ est décroissante si et seulement si $(\forall n \in I): u_{n+1} \leq u_n$.	

	• $(u_n)_{n \in I}$ est constante si et seulement si $(\forall n \in I): u_{n+1} = u_n$. Exemple : ✓ Soit (x_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n = 2n - 3$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_{n+1} - x_n = 2(n+1) - 3 - (2n - 3)$ $= 2n + 2 - 3 - 2n + 3 = 2 > 0$ Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}): x_{n+1} - x_n > 0$. D'où (x_n) est croissante (plus précisément est strictement croissante). ✓ Soit (y_n) la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}): y_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $y_{n+1} - y_n = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $= 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(\frac{2}{3} - 1\right) = 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \left(-\frac{1}{3}\right) < 0$ Donc $(\forall n \in \mathbb{N}): y_{n+1} - y_n < 0$. D'où (y_n) est strictement décroissante.
Evaluation	 Application : Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans les cas suivants : 1. $u_n = \frac{3}{n+1}$ 2. $u_n = n^2 + 2n$ 3. $u_n = \sqrt{n+1}$ 4. $u_n = (-1)^n$
Résumer du cours	Remarques : $(u_n)_{n \geq p}$ Est une suite numérique. • Si $(u_n)_{n \geq p}$ est croissante, alors $(\forall n \geq p): u_n \geq u_p$. • Si $(u_n)_{n \geq p}$ est décroissante, alors $(\forall n \geq p): u_n \leq u_p$.
Evaluation	 Application ⑤ : Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n} \end{cases} ; \forall n \in \mathbb{N}$ 1. Calculer u_1 et u_2. 2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > 3$. 3. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): U_{n+1} - U_n = \frac{(1-U_n)(U_n-3)}{U_n}$. b. Etudier la monotonie de la suite (u_n). c. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n \leq 6$.
Activité d'initiation	II. Suite arithmétique  Activité ③ : On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 1. Vérifier que $u_1 = u_0 + 3, u_2 = u_1 + 3$ et $u_3 = u_2 + 3$. 2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} = u_n + 3$. On remarque que pour calculer un terme de cette suite on ajoute 3 au terme précédent. On dit que la suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$.

Résumer du cours	1) Définitions  Définition : Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est arithmétique s'il existe un nombre réel r tel que $(\forall n \in I) :$ $u_{n+1} = u_n + r$. Le nombre r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in I}$.
	Technique : Pour savoir si une suite (u_n) est arithmétique on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$, si le résultat est une constante r indépendante de n, alors la suite est arithmétique de raison r.
	Exemple : - Montrons que la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = -\frac{3}{2}n + 5$ est arithmétique. - Montrons que la suite (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = n^2 + 5$ n'est pas arithmétique.
	 Application ⑥ : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$ On pose : $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ Montrer que (v_n) est une suite arithmétique, préciser sa raison et son premier terme.
Résumer du cours	2) Terme général d'une suite arithmétique :  Propriété: $(u_n)_{n \in I}$ est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_p. Le terme général de $(u_n)_{n \in I}$ est : $u_n = u_p + (n - p) \times r$ pour tout $n \geq p$.
	Remarque : En particulier, si $p = 0$, on a : $u_n = u_0 + n \times r$. Si $p = 1$, on a : $u_n = u_1 + (n - 1) \times r$.
	Exemple 1: Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = \frac{1}{2}$ et $u_6 = 3$. Calculons u_{30}. On a : $u_{30} = u_6 + (30 - 6) \times \frac{1}{2} = 15$.
	Exemple 2: Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r tel que $u_0 = 5$ et $u_{100} = -45$ Déterminons r et u_n en fonction de n On a $u_{100} = u_0 + 100r$. Donc : $100r = u_{100} - u_0 = -45 - 5 = -50$. D'où : $r = \frac{-50}{100} = \frac{-1}{2}$ et par suite $u_n = u_0 + nr = -5 - \frac{1}{2}n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Evaluation	 Application ⑦ : Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_1 = 5$ et $r = 2$. - Calculer u_5 ; u_{10} et u_{100}. - Déterminer le terme général de la suite (u_n). - Est-ce que 203 est un terme de la suite (u_n).
Résumer du cours	3) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :  Propriété: $(u_n)_{n \in I}$ est une suite arithmétique. On a : $(\forall n, p \in \mathbb{N}) : p \leq n : S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_n + u_p}{2} \right)$. u_p : le premier terme de la somme.

	• $(n - p + 1)$: le nombre des termes.
Evaluation	 Application ⑧ : Soit (v_n) une suite arithmétique telle que $v_3 = 2$ et $v_7 = 14$. 1. Détermine la raison r de cette suite et son premier terme v_0. 2. Exprimer v_n en fonction de n. 3. Calculer la somme : $S = v_4 + v_5 + v_6 + \dots + v_{25}$.
Activité d'initiation	III) Suite géométrique :  Activité ⑨ : On considère la suite (u_n) définie par $u_n = 3 \times 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. 1. Vérifier que $u_1 = 2u_0$, $u_2 = 2u_1$ et $u_3 = 2u_2$. 2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = u_n + 3$. On remarque que pour calculer un terme de cette suite on multiplie terme précédent par 2. On dit que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$.
Résumer du cours	1) Définitions  Définition : Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_{n \in I}$ est géométrique s'il existe un nombre réel q tel que $(\forall n \in I) : u_{n+1} = qu_n$. Le nombre q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n \in I}$. Exemple : ➤ Montrons que la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = -7 \times 5^n$ est géométrique. ➤ Montrons que la suite (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = n^2 + 5$ n'est pas géométrique.
Evaluation	 Application ⑨ : Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1 \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$ On pose : $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = u_n + 3$ Montrer que (v_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
Résumer du cours	2) Terme général d'une suite arithmétique :  Propriété : $(u_n)_{n \in I}$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_p. Le terme général de $(u_n)_{n \in I}$ est : $u_n = u_p \times q^{n-p}$ pour tout $n \geq p$. Remarque : En particulier, si $p = 0$, on a : $u_n = u_0 \times q^n$. Si $p = 1$, on a : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$. Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique telle que $u_2 = \frac{3}{16}$ et $u_5 = \frac{3}{1024}$. Déterminons u_n en fonction de n. Soit q la raison de cette suite. On a : $u_5 = u_2 \times q^{5-2}$. Donc $q^3 = \frac{u_5}{u_2} = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{4}\right)^3$. Alors $q = \frac{1}{4}$. Il en résulte : $u_n = u_2 \times q^{n-2} = \frac{3}{16} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$. Par suite : $u_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Evaluation n	 Application ①② : Soit (v_n) une suite de raison $q = 2$ et de premier terme $v_1 = 5$. 1. Calculer u_4. 2. Exprimer v_n en fonction de n.	
Résumer du cours	3) Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique :  Propriété: Soit (u_n) une suite géométrique de raison q, on a : $\forall n; p \in \mathbb{N} ; p \leq n : S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$. ➤ Si $q \neq 1$, alors $S_n = u_p \times \left(\frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} \right)$. ➤ Si $q = 1$, alors $S_n = (n - p + 1) \times u_p$. u_p : le premier terme de la somme. $(n - p + 1)$: le nombre des termes. Remarque : Pour tout $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, on a : $1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.	
Evaluation	 Application ①② : Soit (u_n) une suite géométrique telle que $q = 3$ et $U_4 = 12$. Calculer la somme $S = U_4 + U_5 + U_6 + \dots + U_{2006}$.	