

Prof : LAGUSIBY Mustapha	Durée : 8 heures	Calcul trigonométrique	Niveau : 1B.S.E.F
Les capacités attendues	• Maîtriser les différentes formules de transformations. • résoudre des équations et des inéquations trigonométriques se ramenant à la résolution d'équations et d'inéquations fondamentales. • Représentation et lire les solutions d'une équation ou d'une inéquation sur le cercle trigonométrique.		
Prérequis	• Formules de transformations. • Transformation de l'expression : $a \cos x + b \sin x$. • Equations et inéquations trigonométriques		
Recommandations pédagogiques	• On optera pour la simplicité lors de la présentation de ce chapitre en utilisant toute technique à la portée aux élèves. • On utilisera le cercle trigonométrique pour résoudre une inéquation trigonométrique simple sur un intervalle de $\mathbb{R}$.		
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	• Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électroniques • Distribution périodique du programme de mathématiques.		
Rôle de l'enseignant	• Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations		
Rôle de l'apprenant	• Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions. • Formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème, une propriété + Répondre aux exercices		

Etapes	contenu	Durée
Activité d'initiation	I. Formules de transformations Activité 1 Le plan(P)est rapporté à un repère orthonormé direct ($O; \vec{i}; \vec{j}$) et (C) le cercle trigonométrique qui lui est associé. Soient a et b deux réels. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls tels que $\ \vec{u}\ = \ \vec{v}\ = 1$ et $(\vec{i}; \vec{u}) \equiv b[2\pi]$ et $(\vec{i}; \vec{v}) \equiv a[2\pi]$. 1) Déterminer la mesure de l'angle orientée $(\vec{u}; \vec{v})$ en fonction de a et b. 2) Calculer par deux méthodes le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$. 3) En déduire que $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. 4) Montrer que $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$. 5) En remarquant que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$. Montrer que $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ et $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.	
Résumer du cours	Propriété : Soient a et b deux réels, on a : • $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$; • $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$; • $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$; • $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.	
Evaluation	Application : 1. Sachant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\sin \frac{5\pi}{12}$, $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$. 2. Soit x un réel. Montrer que : ♠ $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin x$. ♠ $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \cos x$.	
Activité d'initiation	Activité 2: Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. 1. Montrer que si : $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$. 2. Montrer que si : $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, alors $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.	
Résumer du cours	Propriété : Soient a et b deux réels tels que $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. • Si $a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$. • Si $a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors : $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.	
Evaluation	Application : Soit x un réel tel que $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Simplifier l'expression $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \times \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$.	

Résumer du cours	Propriété : Soit a un réel, on a : $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$. $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$. $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$.				
Evaluation	Application : - Sachant que $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer $\cos \frac{\pi}{8}$, $\sin \frac{\pi}{8}$ et $\tan \frac{\pi}{8}$. - Soit x un réel. Montrer que $1 + \cos x + 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) = 2$. - Soit x un réel tel que $x \neq k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} = \tan \left(\frac{x}{2}\right)$.				
Activité d'initiation	II. Transformation de produits en sommes et de sommes en produits 1) Transformation de produits en sommes  Activité ②: Soient a et b deux réels. Simplifier les expressions suivantes : <table border="0"> <tr> <td>a. $\sin(a + b) + \sin(a - b)$</td> <td>b. $\sin(a + b) - \sin(a - b)$</td> </tr> <tr> <td>c. $\cos(a + b) + \cos(a - b)$</td> <td>d. $\cos(a + b) - \cos(a - b)$</td> </tr> </table>	a. $\sin(a + b) + \sin(a - b)$	b. $\sin(a + b) - \sin(a - b)$	c. $\cos(a + b) + \cos(a - b)$	d. $\cos(a + b) - \cos(a - b)$
a. $\sin(a + b) + \sin(a - b)$	b. $\sin(a + b) - \sin(a - b)$				
c. $\cos(a + b) + \cos(a - b)$	d. $\cos(a + b) - \cos(a - b)$				
Résumer du cours	 Propriété : Soient a et b deux réels, on a : $\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$. $\cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$. $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$. $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) - \cos(a - b)]$.				
Evaluation	 Application : - Calculer $\cos \left(\frac{\pi}{12}\right) \cos \left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos \left(\frac{\pi}{12}\right) \sin \left(\frac{5\pi}{12}\right)$. - Soit x un réel. Montrer que $\sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4}$.				
Résumer du cours	2) Transformation de sommes en produits : Soient a et b deux réels, on Pose $x = a + b$ et $y = a - b$. On a : $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$. On remplace a et b respectivement par $\frac{x+y}{2}$ et $\frac{x-y}{2}$ dans la propriété précédente, on trouve la propriété suivante :  Propriété : Soient x et y deux réels, on a : $\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2}\right) \cos \left(\frac{x-y}{2}\right)$. $\sin x - \sin y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2}\right) \sin \left(\frac{x-y}{2}\right)$.				

	$\cos x + \cos y = 2 \cos \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{x-y}{2} \right).$ $\cos x - \cos y = -2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right).$
Évaluation	- Montrer que $\sin \left(\frac{\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$ - Soit x un réel. Montrer que $\cos 6x - \cos 2x = -4 \sin^2 2x \cos 2x.$
Évaluation	III. Transformation de l'expression $a \cos x + b \sin x$: Introduction : Soient a et b deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0).$ On a $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right).$ Or puisque $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1.$ Donc $(\exists \alpha \in \mathbb{R}) : \begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}.$ D'où $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha).$ Par suite $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha).$  Propriété : Soient a et b deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0),$ on a : $a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \alpha)$ avec $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$
Évaluation	 Application : Ecrire sous la forme $r \cos(x - \alpha)$ les expressions suivantes : $A(x) = \cos x + \sin x$; $B(x) = \sqrt{3} \cos x - \sin x$; $C(x) = \sqrt{3} \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left(2x - \frac{\pi}{3} \right).$
Résumer du cours	IV. Equations et inéquations trigonométriques :  Propriété : $\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$ $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} / k \in \mathbb{Z}$ $\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}$
Évaluation	 Application : - Résoudre dans I les équations suivantes : $2 \cos x - \sqrt{3} = 0$; $I = [-\pi, 2\pi].$ $\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$; $I = [0, 2\pi].$ $\tan x = \sqrt{3}$; $I = [-\pi, \pi].$ $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$; $I = [-\pi, \pi].$ - Résoudre dans $\left[-\pi, \frac{\pi}{2} \right]$ l'équation $\sqrt{3} \cos x - \sin x > \sqrt{2}.$