

Les polynômes

I. Polynômes

Activité 01

Soient $(x - 1)$; $(x + 1)$ et $(x + 4)$ les dimensions d'un parallélépipède tel que x un nombre réel supérieure strictement à 1 et soit $P(x)$ son volume.

- 1) Montrer que $P(x) = x^3 + 4x^2 - x - 4$.
- 2) Calculer $P(1)$ et $P(2)$.

Vocabulaire

- ✓ L'expression $x^3 + 3x^2 - x - 3$ s'appelle un polynôme de degré 3 (haute puissance).
- ✓ Les expressions x^3 , $3x^2$, x et -3 s'appellent les monômes de $P(x)$.
- ✓ Le nombre 3 est appelé le coefficient du monôme de deuxième degré.
- ✓ Le nombre (-1) est le coefficient du monôme de premier degré.

Définition :

Un monôme de la variable x est une expression de la forme ax^n où $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, a est appelé le coefficient et n le degré du monôme.

Un polynôme de la variable x est une somme de monômes de la variable x .

Le degré d'un polynôme $P(x)$, noté $\deg(P(x))$ ou $d^\circ(P(x))$, est celui de son monôme de plus haut degré.

Exemple :

- ✓ L'expression $x^5 + 3x^4 - 2x + 5$ est un polynôme de degré 5.
- ✓ L'expression $x + 2\sqrt{x}$ n'est pas un polynôme.
- ✓ L'expression $2x - \frac{3}{x}$ n'est pas un polynôme.

Remarque

- ❖ Le polynôme nul ($P(x) = 0$) n'a pas de degré ;
- ❖ En peut écrire le polynôme $P_1(x) = 3x^5 + 2x^8 + 15x^2 - 7x$ comme suite:
 $P_1(x) = 2x^8 + 0x^7 + 0x^6 + 3x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 15x^2 - 7x + 0$;
- ❖ $A(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) s'appelle: le polynôme affine $d^\circ(A(x)) = 1$;
- ❖ $B(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) s'appelle: **un trinôme** $d^\circ(B(x)) = 2$

II. Egalité de deux polynômes

Propriétés :

On dit que deux polynômes sont égaux si et seulement si :

- Ils ont le même degré
- Ils ont les mêmes coefficients.

Exemple :

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = (a - 1)x^3 + 2ax^2 + 5x + 6$$

$$\text{Et } Q(x) = x^3 + 4x^2 + (2 + b)x + 2b$$

Déterminer la valeur des nombres réels a et b pour que : $P(x) = Q(x)$.

III. Les opérations sur les polynômes

Propriétés :

On considère les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que $\deg(P(x)) = n$ et $\deg(Q(x)) = m$ et $n, m \in \mathbb{N}^*$, on a :

- $P(x) + Q(x)$ est le polynôme de degré : $\max(n, m)$.
- $P(x) \times Q(x)$ est le polynôme de degré : $n + m$.

Exemple :

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = 3x^2 + 2x \text{ et } Q(x) = 5x - 3x^4 + 1$$

$$\text{On a : } \deg(P(x)) = 2 \text{ et } \deg(Q(x)) = 4$$

- $P(x) + Q(x) = -3x^4 + 3x^2 + 7x + 1$ et $\deg(P(x) + Q(x)) = \max(\deg(P(x)); \deg(Q(x))) = 4$
- $P(x) \times Q(x) = -9x^6 - 6x^5 + 15x^3 + 13x^2 + 2x$
 et $\deg(P(x) \times Q(x)) = \deg(P(x)) + \deg(Q(x)) = 2 + 4 = 6$.

Application 01

Déterminer le degré du polynôme $Q(x)$ puis déterminer sa forme sachant que :

$$x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x = (x^2 + 1)Q(x).$$

IV. La division sur $(x - \alpha)$

1. La division euclidienne d'un polynôme sur $(x - \alpha)$

Propriété :

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{R}$,

Il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que :

$$P(x) = (x - \alpha) \times Q(x) + R(x)$$

- Le polynôme $P(x)$ s'appelle le **divisé**
- Le polynôme $(x - \alpha)$ s'appelle le **diviseur**
- $Q(x)$ s'appelle le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ sur $(x - \alpha)$
- $R(x)$ s'appelle le reste de la division euclidienne sur $(x - \alpha)$

Exemple :

On fait la division euclidienne de $P(x) = x^2 + 3x - 2$ sur $x - 1$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + 3x - 2 & x - 1 \\ - & x - 1 \\ \hline x^2 - x & \\ - & \\ \hline 0 + 4x - 2 & \\ - & \\ \hline 4x - 2 & \\ - & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$P(x) = x^2 + 3x - 2 = (x - 1)(x + 4) + 2$$

2. Les racines d'un polynôme

Définition :

Soit $P(x)$ un polynôme et α un nombre réel,

On dit que α est une racine de $P(x)$ si on a : $P(\alpha) = 0$

Exemple :

Montrer que 1 est une racine du polynôme $P(x) = x^2 + 2x - 3$.

Application 02

Déterminer la valeur du nombre a pour que 2 soit une racine du polynôme :

$$P(x) = x^3 - 2x^2 + ax + 6$$

3. La divisibilité sur $(x - \alpha)$

Définition :

On dit que $P(x)$ est divisible sur $(x - \alpha)$ si α est une racine de $P(x)$

Exemple :

Montrer que $P(x) = x^2 - 4x + 4$ est divisible sur $x - 2$.

Application 03

On considère $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes tels que :

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4 \text{ et } Q(x) = x^3 + 3x^2 + x + 7.$$

- 1)
 - Est-ce que $P(x)$ est divisible par $x + 1$?
 - Faire la division euclidienne de $P(x)$ sur $x + 1$
- 2)
 - Est-ce que $Q(x)$ est divisible par $x - 3$?
 - Faire la division euclidienne de $Q(x)$ sur $x - 3$.

Exercice 10 de la série 06